世界の数学者ゆかりの地を訪ねて

数学月間懇話会　2024.7.22（月）
於：東京大学数理科学研究科
埼玉県立浦和第一女子高等学校　仙田章雄

0．自己紹介

都立大学理学部数学科，同大学院博士課程（単位取得満期退学）を経て，埼玉県立高校の教諭．浦和高校定年後，浦和第一女子高校および中央大学理工学部学習支援室にお世話になる．中央大学も定年になり，現在は浦和第一女子高校非常勤講師．

1．本日の全体の流れ

（1）ピタゴラスを訪ねて（ギリシア，イタリア）1990 年夏，2011 年夏，2019 年夏
（2）ブラマグプタを訪ねて（インド）2014 年夏
（3）その他

2．今までの旅

1　1987　はじめての海外旅行
2　1988　一人でヨーロッパ
3　1990　ピタゴラスを訪ねて（ギリシア，トルコ）
4　1992　ガリレオを訪ねて（イタリア）
5　1994　ガウスを訪ねて（長男と，ドイツ）
6　1995　アインシュタインを訪ねて（次男と，スイス，ドイツ）
7　1996　はじめてのインド（インド）
8　2000　ガリレオ，アルキメデスを訪ねて（三男・長男と，イタリア）
9　2002　ミレトス（ターレス）とクレタを訪ねて（ギリシア，トルコ）
10　2003　ラマヌジャンを訪ねて（インド）
11　2004　ガロアを訪ねて（フランス）
12　2005　オイラーを訪ねて（スイス，ドイツ）
13　2006　アーベルを訪ねて（ノルウェー）
14　2008　デカルトを訪ねて（フランス，オランダ）
15　2009　オイラーを訪ねて（カリーニングラード，サンクトペテルブルク）
16　2010　フェルマとパスカルを訪ねて（フランス）
17　2011　デロス島とサモス島（ピタゴラス）を訪ねて（ギリシア）
18　2012　アーベルとハミルトンを訪ねて（ノルウェー，アイルランド）
19　2013　リーマンを訪ねて（ドイツ，イタリア）
20　2014　ブラマグプタを訪ねて（インド）
21　2015　パスカルを訪ねて（フランス）
22　2016　ライプニッツとガウスを訪ねて（ドイツ）
23　2017　エルデシュを訪ねて（ハンガリー）
24　2018　ゲーデルとウィトゲンシュタインを訪ねて（オーストリア，チェコ）
25　2019　ピタゴラスを訪ねて（イタリア・クロトン）

３．まとめ

（１）語学力が不足

基本的にはすべて一人旅

（２）事前の準備が大変

楽しみでもある。ツアーはありえない。

（３）数学通信「気まぐれ」がいい刺激

現在 37 年目

（４）自分一人ではできない

何かありましたら，snd99ryu@oak.ocn.ne.jp まで

気まぐれ

数学通信Vol.32 第14号

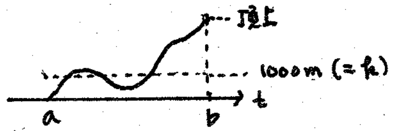
2019年10月1日(火)発行

富士山に登るには標高1000mの地点を通らなければならない

富士山の標高は3776m。0m地点から登るにはどこかで1000mの地点を通る。登るにはアップダウンがあるので、それは1回ではないかもしれない。

数学的に表現してみよう。

登り始めてt時間の高さをf(t)とする。



登り方によりfのグラフは異なる。しかし、中間値の定理を用いると、どこかで1000mの地点を通るとわかる。

● 中間値の定理

関数$f(x)$が閉区間$[a,b]$で連続で、

$f(a) \neq f(b)$

ならば、

$f(a)$と$f(b)$の間の任意のkに対して

$f(c)=k$

となるc $(a<c<b)$が存在する

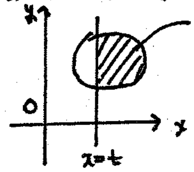
(数Ⅲです)

あんぱんを2等分しよう

図のようにあんぱんがある。1回包丁を入れるだけで2等分できるだろうか。

直感的にはできると思える。右のように関数fをつくり、中間値の定理を用いる。どこかで面積を半分にすることが示せる。ただ、どうやって示すのかはわからない。

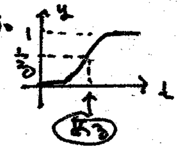
(証明) xy座標の第1象限にあんぱんをおく。



$f(t)=$(直線$x=t$の右側にあるあんぱんの面積)

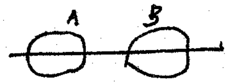
あんぱんの面積を1とする。

tを0から大きくしていくどこかで$\frac{1}{2}$となるようなtが存在する。



2つのあんぱんをいっぺんに2等分したい

あんぱんが2つある。2ついっぺんに2等分することはできるのだろうか。



できる。できることを示そう。

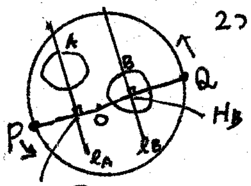


図1

2つのあんぱんを大きな円の中に入れる(図1)。直径PQをおく。PQに垂直であんぱんA,Bをそれぞれ2等分し、PQに垂直な直線l_A, l_Bをひく。垂線の足をそれぞれH_A, H_Bとする。このとき

$f(P)=PH_B-PH_A$

とおく。図1では$PH_B>PH_A$。

次に直径PQをOを中心として反時計回りに回転させる。ちょうど180°回転させると図2のようになる。あんぱんは動かない。図2では$PH_B<PH_A$

つまり、Pを連続的に変化させると

$f(P)>0$から$f(P)<0$となる。

中間値の定理から、どこかで$f(P)=0$となる。このとき$H_A=H_B$となり、$l_A=l_B$となる。これが求めるものである。

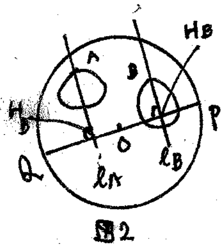


図2

(『数学にとって証明とはなにか』(瀬山士郎) 参照)

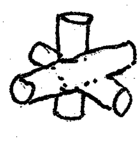
前回の問題

真上から見ると円、正面から見ても、横から見ても円となる立体は何か?

㊀ 球とは限らない。

たとえば同じ半径の3つの円柱の共通部分。

(想像できるかな?)



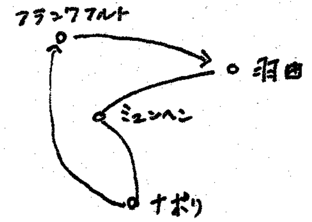
南イタリアへ ― ピタゴラスを訪ねて (1)

2019年の夏，S先生は南イタリアへひとり旅立った。

めざすはピタゴラス。過去にピタゴラスを訪ねる旅は何回かしたことがある。1990年にはトルコからサモス（ギリシア）に入った。ピタゴラスが生まれた島である。2011年にはアテネ→ミコノス→サモスと移動した。今回はいわゆるピタゴラス学園あたりを訪ねようと思った。

飛行機はネットで予約。まずナポリに入りたいのだが，直行便はないのでミュンヘン経由で行くことにした。ちょっとぜいたく(?)だが，ANA（全日空）とLH（ルフトハンザ）のシェア便である。切符をとったのはいいが，手元に切符がないので不安だ。パスポートを提示するだけでいいのだ。

旅立つ前日ルフトハンザよりメール。飛行機が遅れていると。昨年，デュッセルドルフで乗りつぎができず空港で一夜を過ごしたことを思い出した。

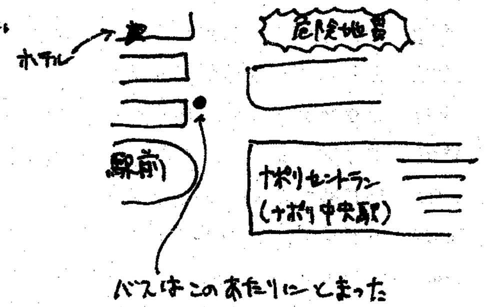


飛行機の近くの席に中学生の集団がいた。ローゼンハイムと市川市（千葉県）がパートナーシティになっていて，派遣されているとのことであった。

ミュンヘン乗りつぎは大丈夫であった。ナポリの空港には予定通り着いた。

駅前にはTaxiの呼びこみが。無視してバスのりばを探す。少しウロツク。5分位歩くところだった。今は夜の11時。切符はバス内で購入。5ユーロである。1ユーロ＝122円。

ホテルは駅に近い安宿をネットでとっていた。ボロイのは分かっていた。ゴミが散らかっている通り。予約したあとグーグルアースで調べたらあやしい通りであった。ムンバイを思い出した。



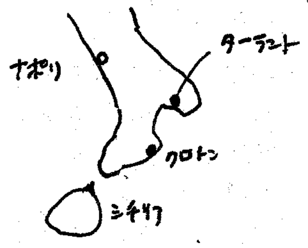
入口は鉄格子。ホテルのインターフォンを押すと，ロックが解除された。到着が遅いのは伝えてある。クーラーがあった。何と冷蔵庫もあった。

朝食つきとあったのだが，フロント近辺においてあるパンや菓子やコーヒーをもって自分の部屋で食べるということだった。いわゆる食堂はない。

翌日，列車の切符をとろうと駅へ。大混乱。大きな荷物をもつ人でごったがえしていた。ツーリストインフォメーションで地図をもらう。割りこむ人多数。

はじめに並んだ切符売り場。整理券をうけとり，駅の中をウロツク。もちろん改札はない。するともう1つ切符売り場があった。何と，さっきのは高速列車のものだったようだ。日本でいえば新幹線のようなものか。ふつうの切符売り場で整理券をもらう。もちろん自動。

翌日のターラント行きの切符を手に入れたい。待つ。とにかく待つ。8時にホテルを出たのだが，切符を手に入れたのは9:55であった。もちろん座るところはないので，構内を歩き回る。あまり広くはない。



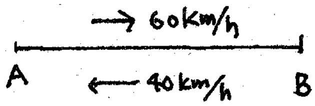
ナポリからターラントは317キロ。東京―豊橋が300キロ。東京―名古屋が370キロである。IC2等で34ユーロ。4200円。安いといえよう。

気まぐれ

数学通信Vol.32 第15号

2019年10月8日(火)発行

行きは時速60キロ,帰りは時速40キロ。平均は?



地点Aから地点Bまで行きは60km/h,帰りは40km/hだった。平均すると $\frac{60+40}{2}=50$(km/h)で走ったことになる。いや,ならない。

AB間の距離を a kmとすると

行き $\frac{a}{60}$時間
帰り $\frac{a}{40}$時間
合計 $\frac{a}{60}+\frac{a}{40}$ (=($\frac{1}{60}+\frac{1}{40}$)a時間)

往復では 2a km なので,平均の速度は

$$\frac{2a}{(\frac{1}{60}+\frac{1}{40})a} = 48\text{km/h}$$

aとbの調和平均だ。

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \left(=\frac{2ab}{a+b}\right)$$

となるのだ。40km/hではないのだ。(Vol29.8号参照)

比率はこわい

上にのべた時速はふつうの数ではなく,比である。距離÷時間という比である。比は単純に計算するとあぶない。

この10月に消費税が8%から10%に上がった。たった2%である。……?

具体的に考えてみよう。

10000円の買物をすると,今までは消費税は8%の800円だった。10%となると1000円である。10000円からすると,800円から1000円と200円のアップである。税金,つまり消費税という立場でみると

800円 ⇝ 1000円

の変化は,$\frac{1000}{800}\times 100=125$,つまり25%のアップなのである。

前回の5%から8%のときは,$\frac{800}{500}\times 100=160$,つまり60%のアップだった。消費が落ちこんだのはいうまでもない。今回はその反省を受けて軽減税率が登場した。生活必需品は8%のままというが線引きが混乱している。更にキャッシュレスだと還元されるという。一般に弱者はカードをもっていない。

・キャッシュレス
- 中小企業での小売,飲食ー(5%還元)
  - 軽減なし 5%
  - 軽減 3%
- コンビニなど外食 —(2%還元)
  - 軽減なし 8%
  - 軽減 6%

・現金
- 軽減なし 10%
- 軽減 8%

南イタリアへ ―― ピタゴラスを訪ねて(2)

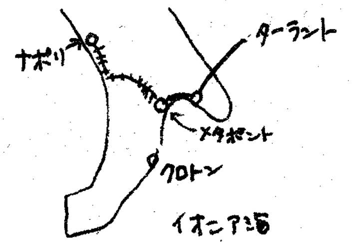
今、ナポリ。ナポリ・セントラル（ナポリ中央駅）を出て歩き始める。考古学博物館をめざす。裏通りを歩く。道が狭い。坂が多い。洗濯物がぶらさがっている。近道と思ったがよく曲がったりするので近くはなかったようだ。

博物館の外装は工事中。でも中には入れた。15ユーロ（1800円）。広い。世界でも屈指のギリシア、ローマの美術のコレクション。1585年に騎兵隊の兵舎としてつくられ、のちに増設されている。

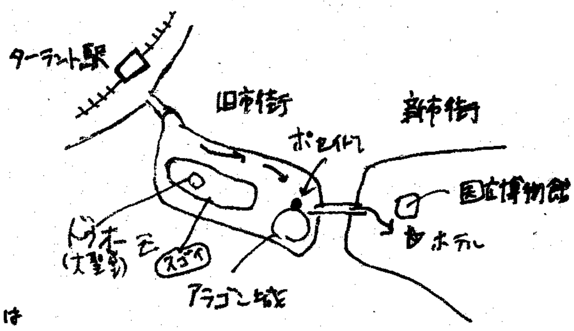
ケーブルカーに乗ろうと思った。モンテサンテ駅。よくわからないまま乗る。不安だったので途中(?)からひきかえした。ケーブルとロープウェイをかんちがいしていたのかもしれない。

炎天下の中、1万7000歩はキツイ。足が痛いというよりは、反り返って歩いている感じで背骨が痛い。

翌日、2時半に目が覚めた。寝たのは6時。時差ボケと疲れか。今日はターラントに向かう。一気にクロトンに行ってもいいが、寄ってみよう。ターラントに近づくにつれてイオニア海が異様な感じになってきた。鉄塔が海上に沢山ある。何か採掘しているのか。



1時間遅れでターラント駅に着いた。駅からは左に海を見ながら旧市街から新市街へ。ホテルに着く。



スマホは役に立つ。40分歩いた。
強風。34°C。

チェックインのあと町にくり出す。博物館は工事中のため閉鎖。アラゴン城は時間によって入れるようだ。ポセイドン神殿があった。

旧市街へ。おそろしいところであった。一人歩きは危険な雰囲気だ。建物はとてもボロイ。寂れた通り、すすけた住居。「ターラント　旧市街」で検索すると、老朽化の威圧感を感じとれるかもしれない。

さて、ホテルにもどろう。部屋をまちがえたようだ。チェックインした部屋にもどったのだが、そこは指示された部屋ではなかった。1フロア カンチガイしてしまった。日本では1F, 2F, …となっているが、海外では向こう 0F, 1F, 2F, …となっている。しかしなぜそのキーで部屋があいたのだろう…。

翌日、ターラント駅でクロトン行きの切符を予約しに行った。旧市街をぬける。意外と近かった。

しかし…。駅には人がほとんどいない。駅員もいない。窓口もしまっている。しまった！こんなことがあるのか。わからない…。駅員らしい人が通った。聞いてみると、駅員ではなかった。

自動販売機があるので挑戦してみた。まず画面を英語にする。なかなかうまくいかない。そばにいた人が手助けしてくれた。何とか購入することができた。カードを使う。

バスがきた。新市街へいくというので乗る。切符は運転手から買う。アラゴン城へ。1時間のツアーで無料。海軍の施設なのでガイドがつく。英語。よくわからないが、話し方に強弱があり参考になる。ナイスガイだった。握手をして別れる。新市街にピタゴラス通りを見つけた。

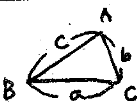
疲れた。2万歩。明日はクロトンに向かおう

気まぐれ

数学通信Vol.32　第16号
2019年10月15日（火）発行

転換法とは？

あまり知られていない証明方法に転換法というのがある。
ピタゴラスの定理はよく知られている。直角三角形についての定理だ。鋭角，鈍角についてもまとめてみると次のようになる

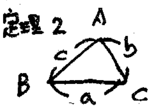
定理1


において

$C < 90^\circ \Rightarrow a^2+b^2 > c^2$
$C = 90^\circ \Rightarrow a^2+b^2 = c^2$
$C > 90^\circ \Rightarrow a^2+b^2 < c^2$

ピタゴラスの定理

ピタゴラスの定理の逆

定理2


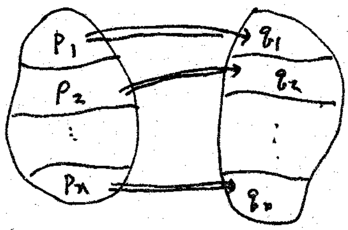
において

$a^2+b^2 > c^2 \Rightarrow C < 90^\circ$
$a^2+b^2 = c^2 \Rightarrow C = 90^\circ$
$a^2+b^2 < c^2 \Rightarrow C > 90^\circ$

もし定理1がいえたとすれば定理2は自動的に成り立つ。これは転換法による。

転換法

$p_1 \Rightarrow q_1,\ p_2 \Rightarrow q_2,\ \cdots,\ p_n \Rightarrow q_n$ が成り立ち，
$p_1, p_2, \cdots, p_n$ はすべての場合を重なりなくみたし，$q_1, q_2, \cdots, q_n$ もすべての場合を重なりなくみたすならば，
$q_1 \Rightarrow p_1,\ q_2 \Rightarrow p_2,\ \cdots,\ q_n \Rightarrow p_n$ が成り立つ。



ほかにもいろいろな例がある。

例1　2次方程式の解について

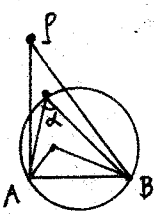
$D > 0 \Rightarrow$ 異なる2つの実数解をもつ
$D = 0 \Rightarrow$ 重解をもつ
$D < 0 \Rightarrow$ 異なる2つの虚数解をもつ

例2　$\triangle ABC$において

$AB > AC \Rightarrow \angle C > \angle B$
$AB = AC \Rightarrow \angle C = \angle B$
$AB < AC \Rightarrow \angle C < \angle B$

例3　直線ABの上方に点Pがある。
このとき

P：円の外部にある $\Rightarrow \angle APB < \alpha$
P：円の周上にある $\Rightarrow \angle APB = \alpha$
P：円の内部にある $\Rightarrow \angle APB > \alpha$



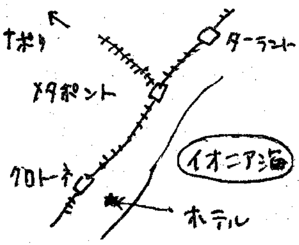
これらの例も，すべてバサッと逆もいえる。
（参考　「気まぐれ」（Vol 20. 15号）　）

南イタリアへ — ピタゴラスを訪ねて(3)

2泊で6400円のターラントのホテルをひきはらい駅に向かう。旧市街の入口でハムパンを購入。旧市街をぬけて、ナポリ橋の下で休憩。コーラを飲む。

ターラント ⟶ クロトン は 235Km。ICのクーラーはありがたい。

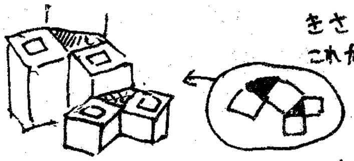
クロトンは今はクロトーネ Crotone という名前だが、クロトンという名前に親しみがあるのでクロトンと呼ぶ。駅についた。何もない。タクシーが2,3台停まっている。ガイドブックもないので、ネットから出力した地図とスマホをたよりに歩く。ホテルからは「何時頃到着するのかお知らせ下さい」というようなメッセージが入っていた。ウロツクだろう時間を想定して、予定時刻を伝えておいた。それらしいところに着いたがわからない。ある建物のインターフォンを見たら、4Fにそのホテルの名前が書いてあった。押す。ロックがあいた。4Fまで歩く。中は暗い。受付には若い女性がいた。一応朝食つきだが、自分でとってきて部屋で食べるシステムだ。普段は無人のようだ。



街に出る。ピタゴラス博物館 Museo di Pitagora を目指す。少しうろついたが歩いていけるところだった。山というか丘というか、登ったところにある公園の中にあった。3ユーロ。やっとピタゴラスに会えたという感じだ。

建物は吹きぬけの2階建てである。まず、ピタゴラスのレリーフに出会う。肖像画のほかに、学園で教えている風景もある。日本では見たことがない。長い通路に何枚もある。天井からは正多面体がぶら下がっている。ブロンズ像もある。何かコンサートをやる準備もしている。今夜あるのだろう。何人かが集まってきている。

博物館の外には パスカルの三角形のモニュメント。そうかと思うと ピタゴラス三角形のモニュメントもあった。斜めから見ると次のようになっている。人が乗れそうな大きさである。



これがいくつもつながっている。

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
⋮

パスカルの三角形

昨日ターラントからクロトンに向かう列車の中で、クロトンからナポリへいく列車の予約をしようと思った。スマホをいじる。手頃なのがあった。予約をした。したと思ったが、画面が消えてしまった。カード番号は入れた…。どうなっているのだろう。不安。

どこの画面で「予約」したのかもわからない。たしか「グーグルクラウド に保存しますか?」という画面までは覚えている。そこで消えてしまった。予約はとれていないのか? とれていたとしたら切符は?

翌日、切符の確認のため駅に向かった。3000歩。道はわかる。サッカー場があった。そういえば、FCクロトーネ というチームがある。

駅に着いた。駅員がいない。窓口はあいていない。まだだ…。確認しようもない。お客は数人いる。列車がくれば駅員はくるだろう…。待つ。とにかく待つ。窓口はあかない。乗客は自動券売機で買っている。そうじゃなくて、駅員に相談したいのだ。

列車が到着した。駅員が2人。タイミングを見て話しかける。英語。通じない。ポケトークでイタリア語。片コトが通じたようだが、説明がむずかしい。そばにいた女の人が英語に通訳してくれた。「切符はどこに?」「わからない」「どの会社で?」…。

気まぐれ

数学通信Vol.32　第17号

2019年10月29日（火）発行

数学的帰納法は帰納法ではない

数列という分野で 数学的帰納法が登場する。これは証明方法の1つである。証明方法は 演繹法と帰納法がある。

演繹 deduction とは，普遍的命題から経験に頼らずに，論理の規則によってのみ結論を導く方法である。

帰納 induction とは，個別の経験やデータから，普遍的な命題を推し量る方法である。

- 数学的帰納法

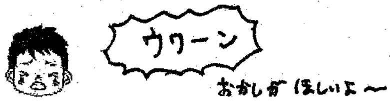
  $P(n)$ を自然数 n についての命題とする $P(n)$ がすべての n に対して成り立つことを示すには次を示せばよい。

  [1] $P(1)$ は真である。

  [2] $P(k)$ が真であると仮定すると $P(k+1)$ も真である。ここで k は任意の自然数。

  [1]，[2] より，すべての自然数 n に対して $P(n)$ が成り立つ

子供は泣くと お菓子を買ってもらえる



子供が駄々をこねるとお菓子を買ってもらえる。スーパーに行くたびにそのような経験をすると「泣くとお菓子を買ってもらえる」という命題を発見する。100羽のカラスを観察したら黒かったことから，「すべてのカラスは黒い」という命題を発見する。

自然科学は，通常ある命題を実験によって証明する。ニュートンは落下や運動を観察し，実験し，理論をつくり，古典力学を導いた。しかしのちに，それは否定され，拡張され アインシュタインの相対性理論となった。

一方，数学は，いくつかの前提から演繹的に導く。一連の演繹のプロセスを証明という。前提，証明が正しいならば結論がひっくり返ることはない。非ユークリッド幾何学は ユークリッド幾何学が間違っていたからできたのではなく，前提の一部をさしかえたため登場したのである。

数学的帰納法は パスカルがいわゆる「パスカルの三角形」の証明に用いたのがはじめと言われている。1654年。（パスカル，1623～1662）

例 $1+2+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$ ---①

の証明：

[1] $n=1$ のとき （左辺）$=1$，（右辺）$=\frac{1}{2}\cdot1\cdot2=1$

よって成り立つ。

[2] $1+2+\cdots+k=\frac{1}{2}k(k+1)$ ---② を仮定し，$1+2+\cdots+k+(k+1)=\frac{1}{2}(k+1)(k+2)$ ---③ を示す。

（③の左辺）$=\underbrace{1+2+\cdots+k}+(k+1)\overset{②}{=}\frac{1}{2}k(k+1)+(k+1)\overset{\text{因数分解}}{=}\frac{1}{2}(k+1)(k+2)=$（③の右辺）

[1]，[2] より ① が示せた。

［問題］

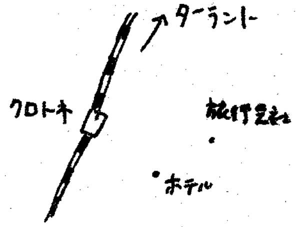
すべての自然数 n に対して

$f(n)=n^2+n+41$

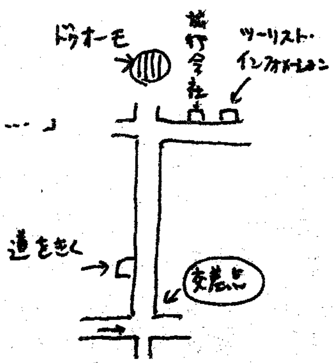
は素数となることを示せ。

南イタリアへ ―― ピタゴラスを訪ねて(4)

クロトンの駅。スマホで予約したはずの切符はどこにいったのだろう？日本語、英語、イタリア語が混じって説明する。クロトンからナポリへ向かう明日の列車の切符をとったはずなので確認してもらえませんか。ポケトークは役に立った。話がこみいっているが、少しは通じたようだ。



「インターネットで購入したチケットの領収書はどこですか？」
「ネットに触れられないのでわからないのです」
「買わなくてはいけない」
いろいろ考えた結果、再度(?)購入することにした……。
すると駅員は自動券売機を操作しはじめる。
「この列車でいいですか？
あれ、おかしい。画面が動かない」
駅員はどこかに電話した。
「こわれた」
そんな……。それじゃ困る。



「いつ直るんですか？」
「わからない。今日の夜か明日の朝に直るかどうか……」
そんなことがあるのか。ここは駅だ。
「では切符はどこで買えばいいのですか？」
「旅行会社がいい」
ここは駅だ。納得できない……。
「旅行会社はどこにあるのですか？」
「車か？」
車のはずがない。Taxiで行けという。どこに行っていいかわからない。駅を出る。するともう1人の駅員がやってきて、説明している。その人の車で行くことになった。ありがたい。
知らない道をグルグル。あやしくはないと思うが……。交差点に着いた。信号待ちの間におろされた。周りを見ても旅行会社らしいのは見つからない。旅行会社の前で降ろしてくれるのかと思ったが……。
うろうろ。あっちをうろうろ。こっちをうろうろ。それらしいところがあった。聞く。違う。旅行会社を知っていますか？ポケトーク。
「Cerrelli書店の近くにある」
歩く。しかし、書店は見つからない。戻る。
「すみません、地図を書いてくれませんか？」
ドゥオーモの近くで、そこを左に曲がるというが、手では右を指している……。ドゥオーモまで歩き、右に曲がる。ツーリストインフォメーションがあった。これは助かる。
これは助かる。明日、ナポリへいく列車の切符をとりたい旨を伝える。バスはどうですか？列車だとのりかえがある。バスという手があったのか……。しかし時間が早すぎる。7時出発だ。チェックアウトの心配もある。バス停をさがす不安もある。やはり列車にした。すると「すぐそばに旅行会社がある」と。他の人が、連れていってあげれば…と言っているようだ。
あった。これが旅行会社か。S先生より年長そうな御婦人がいた。要件を伝える。とれた！やっととれた。カードで払おうとしたら、現金のみということだった。
ここまで長かった……。これでナポリに帰れる。

気まぐれ

数学通信 Vol.32 第18号
2019年11月5日(火)発行

ここで問題です

以下の文を読みなさい。

アミラーゼという酵素はグルコースがつながってできたデンプンを分解するが，同じグルコースからできていても，形が違うセルロースは分解できない。

この文脈において，以下の文中の空欄にあてはまる最も適当なものを選択肢のうちから1つ選びなさい。

グルコースからできているのは，デンプンと(　)である。

① セルロース　② アミラーゼ　③ 酵素　④ 形

答(　)

どうだろう。答えがわかっただろうか。

これは『AIに負けない子どもを育てる』(新井紀子)の中の問題の1つである。この本は前著『AI vs. 教科書が読めない子どもたち』の続編である。この本については「気まぐれ」(Vol.31 第1号)に載せた。

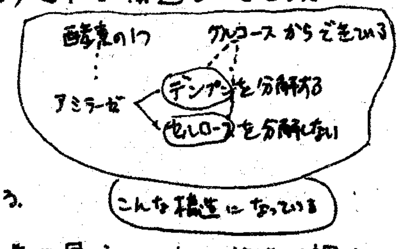
AIは数学で動いている。文章を入力しても意味がわかっての反応ではない。人間にとって大切なことは意味がわかることだ。意味がわかるというのは国語でも数学でも同じ。読解力が必要。

上の問題は，いわゆるリーディング・スキルテスト(RST)の1つである。単語のひとつひとつは分からなくても文章の中で説明されているので，それを構造としてとらえることができるからだ。

例えば次のことがわかる。

- アミラーゼは酵素の1つ
- アミラーゼはデンプンを分解する。
- アミラーゼはセルロースを分解しない。
- デンプンやセルロースはグルコースがつながってできている。
- デンプンとセルロースは形が違う。

答①



S先生は生物は苦手だが，数学を学んだおかげで，文の構造が見えてきた。辞書で調べたら，グルコースとはブドウ糖 $C_6H_{12}O_6$ のことだった。

問題　次の中で整式はどれか？

① $3x$　② $2.5x$　③ $x^2+2x+3+x+1$　④ $\sqrt{x}$　⑤ $\frac{1}{x}$　⑥ $\sqrt{2}$　⑦ $\frac{x}{2}$

前号の問題　すべての自然数 n に対して
$f(n)=n^2+n+41$
は素数となることを示せ。

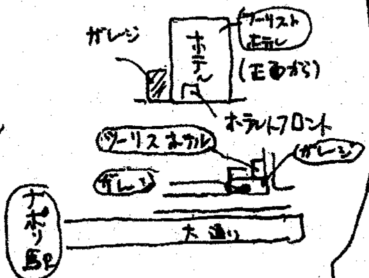
答　この命題は偽であるので示せない。
(反例 $n=41$)

訂正　前号で，右側下から3行目
「要件を伝える」
を「用件を伝える」
に訂正して下さい。

― 南イタリアへ ― ピタゴラスを訪ねて(6) ―

ナポリのホテル前に着いた。そこには Tourist Hotel というのがある。しかしここではない。

「何かお手伝いすることがありますか？」



するとホテルの横のガレージを指して，ここだ，という。え？まさか…。
彼は電話してくれた。担当者が2人やってきた。1人はいかめしい。もう1人は弱々しい。何かあってもこの男には勝てるだろう…。キャンセルしてこのホテルに泊まろうかなと思う。2人は駅前通りのガレージへ。暗証番号を入れる。カギがあく。中庭があり，右の鉄格子の扉をカギであける。暗い。中には，らせん階段がある。中央に小さなエレベーター。なんだか監獄にいるようだ。(入ったことはないけれど) 降りたところも暗い。どこかのスイッチを押す。一部の灯りがついた。カウンターがある。そこがフロントにあたるようだ。4F。日本でいう5F。カードで支払いをしようとするとちょっと待って下さいといって出ていった。しばらく待つ。エレベーターのドアが開いた。Tシャツ短パンの男が出てきた。あいさつをする。隣の部屋の男だ。夕食を買ってきたようだ。泊まる人がいるんだ！と安心。

いかめしい男が1人で戻ってきた。3泊で93ユーロ。安いことは安い。朝食とチェックアウトのこともきく。朝食はここから持っていって下さい。チェックアウトは，カギをカウンターにおいていって下さい。ガレージの入口の暗証番号の他に，鉄格子，エレベータ，部屋の大きなカギを3つもたされた。

考えてみるとスマホに

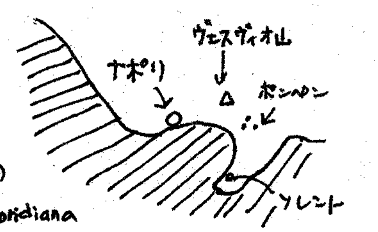
「ホテルの到着時間を教えて下さい」

というメールが入っていた。少しおそめに連絡しておいた。早く着いたので誰もいなかったのだろう。
部屋は広い。クーラーはある。冷蔵庫は無い。菓子パンのようなものをとりに行って自分の部屋で朝食をとるというシステムだ。

翌日はポンペイ見学。ここまで来て行かない訳にはいかない。CV (ヴェスヴィオ周遊鉄道 Circum Vesuviona) のナポリ駅から列車にのる。ソレント行きにのろうと思っていたが，1つ前の列車に乗ってしまったので，途中から引き返す。改めてソレント行きに乗る。30分に1本位あるから問題ない。しかし列車はボロイ。ガタガタ、ガタガタ。坂をのぼるのもやっと。停まってしまった。みんな降りている。

「日本人の方ですか？」

若い女の人。こちらに来て初めて聞く日本語だ。列車がこわれたので2番線から別の列車を出すので乗りかえて下さいとのことです―と。イタリア人のていねいな日本語に感激。



小雨が降ってきた。しかし観光客は多い。ポンペイは79年にヴェスヴィオ山の大噴火で火山灰に埋もれた古代都市。当時のまま発掘されたので古代ローマの生活が垣間見える。発掘は今もつづいて，新たな発見もあるようだ。

その翌日はナポリ市内を歩きまわる。ケーブルカー (フニコラーレ) に乗る。トレド広場からチェントラー線でフーガ駅。少し歩くと Villa Froridiana という公園。ナポリ市内が一望できる。穴場だ。人は少ない。穴場だ。地元民の散歩コースのようだ。

ナポリ大学。「見学したいのですが」というと「合格してから」と言われた。冗句なのか？
サンタルチア港の卵城は遠かった。

帰国の日。ナポリの空港からフランクフルトへ。2時間。乗りかえ時間はたっぷりとってある。空港に，アインシュタインがイスの座っている像があった。「御自由にどうぞのピアノ」がおいてある。日本人がふえてきた。

フランクフルトから日本へ。通路側の席で，隣は日本人。奥さんとは席が別になっている。彼は元大学教授。ドイツの史学，文学を研究していて，子供がケルンにいるという。いろいろ話す。ブログも開設していて，今回のドイツの旅についても載せている。

とったはずの列車の代金はカードからひかれていなかった。あ～、一人旅はキビシイなあ。〈完〉

気まぐれ

数学通信Vol.32 ・第19号
2019年11月12日（火）発行

整式とは何だろうか？

整式という用語が正式に登場するのは『数学I』においてであろう。そこには例えば

- $2a$, $-x^2y$, 3 のように，数，文字およびそれらの積として表される式を単項式という。
- $3xy^2-5y+7$ のように，単項式の和として表される式を多項式という。
- 単項式と多項式を合わせて整式という。

と書かれている。

前号の問題を見てみよう。

> 問題　次の中で整式はどれか？
>
> ① $3x$　② $2.5x$　③ $x^2+2x+3+x+1$　④ $\sqrt{x}$　⑤ $\frac{1}{x}$　⑥ $\sqrt{2}$　⑦ $\frac{1}{2}$

答　①,②,③,⑥,⑦

高い立場では —

整式{単項式, 多項式

整式＝多項式

高校では整式と多項式を区別している。しかし，大学からは，整式という言葉は使わないで，多項式と同じものと扱っている。たまたま項が1つのときが単項式である。区別すると

$$\left.\begin{array}{ll}\text{単項式}+\text{単項式}=\text{単項式} & \text{は，まちがい}\\ \text{多項式}+\text{多項式}=\text{多項式} & \text{は，まちがい}\end{array}\right\}\text{高校}$$

となってしまう。高い立場では

$$\left.\text{多項式}+\text{多項式}=\text{多項式}\quad\text{は，正しい}\right\}\text{大学から}$$

といえるのである。あまりこだわらない方がいいでしょう。

より正式にいうと

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

（各 a_i は実数）

というのが1変数多項式である。（多項式＝polynomial）

気まぐれVol.30.第19号参照

すべての a_i が0のときは零多項式と呼んでいる。

整式という言葉は日本だけの言葉のようである。（『数学の小辞典』，岩波ジュニア新書）

なお，教科書では係数についてはくわしく触れていないけれども，ふつうは実数を考えている。しかし，複素数でも有理数でもよい。一般には，加減乗除ができる集合である。

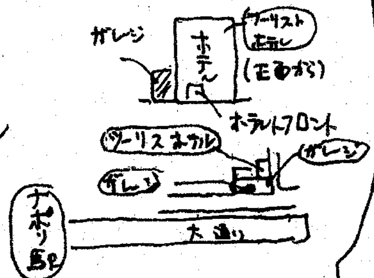
> 問題　次の数を，歴史上古い順に並べなさい。
>
> ①正の整数　②0　③負の整数　④小数　⑤分数　⑥平方根

（『ガロア理論』（鈴木智秀）SB Creative）

南イタリアへ ― ピタゴラスを訪ねて(6)

ナポリのホテル前に着いた。そこには Tourist Hotel というのがある。しかしここではない。

「何かお手伝いすることがありますか？」



するとホテルの横のガレージを指して、ここだ、という。え？まさか…。彼は電話してくれた。担当者が2人やってきた。1人はいかめしい。もう1人は弱々しい。何かあってもこの男には勝てるだろう…。キャンセルしてこのホテルに泊まろうかなと思う。2人は駅前通りのガレージへ。暗証番号を入れる。カギがあく。中庭があり，右の鉄格子の扉をカギであける。暗い。中には，らせん階段がある。中央に小さなエレベーター。なんだか監獄にいるようだ。(入ったことはないけれど)降りたところも暗い。どこかのスイッチを押す。一部の灯りがついた。カウンターがある。そこがフロントにあたるようだ。4F。日本でいう5F。カードで支払いをしようとするとちょっと待って下さいといって出ていった。しばらく待つ。エレベーターのドアが開いた。Tシャツ短パンの男が出てきた。あいさつをする。隣の部屋の男だ。夕食を買ってきたようだ。泊まる人がいるんだ！と安心。

いかめしい男が1人で戻ってきた。3泊で93ユーロ。安いことは安い。朝食とチェックアウトのこともきく。朝食はここから持っていって下さい。チェックアウトは，カギをカウンターにおいていって下さい。ガレージの入口の暗証番号の他に，鉄格子，エレベータ，部屋の大きなカギを3つもたされた。

考えてみるとスマホに

「ホテルの到着時間を教えて下さい」

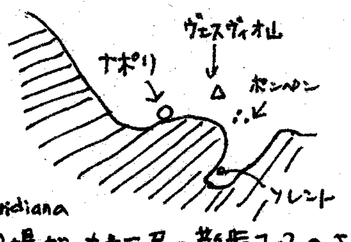
というメールが入っていた。少しおそめに連絡しておいた。早く着いたので誰もいなかったのだろう。部屋は広い。クーラーはある。冷蔵庫はない。菓子パンのようなものをとりに行って自分の部屋で朝食をとるというシステムだ。

翌日はポンペイ見学。ここまで来て行かない訳にはいかない。CV(ヴェスヴィオ周遊鉄道 Circum Vesuviona)のナポリ駅から列車にのる。ソレント行きにのろうと思っていたが，1つ前の列車に乗ってしまったので，途中から引き返す。改めてソレント行きに乗る。30分に1本位あるから問題ない。しかし列車はボロイ。ガタガタ、ガタガタ。坂をのぼるのもやっと。停まってしまった。みんな降りている。

「日本人の方ですか？」

若い女の人。こちらに来て初めて聞く日本語だ。列車がこわれたので2番線から別の列車を出すので乗りかえて下さいとのことです―と。イタリア人のていねいな日本語に感激。

小雨が降ってきた。しかし観光客は多い。ポンペイは79年にヴェスヴィオ山の大噴火で火山灰に埋もれた古代都市。当時のまま発掘されたので古代ローマの生活が垣間見える。発掘は今もつづいて，新たな発見もあるようだ。



その翌日はナポリ市内を歩きまわる。ケーブルカー(フニコラーレ)に乗る。トレド広場からチェントラー線でフーガ駅。少し歩くと Villa Froridiana という公園。ナポリ市内が一望できる。穴場だ。人は少ない。穴場だ。地元民の散歩コースのようだ。

ナポリ大学。「見学したいのですが」というと「合格してから」と言われた。冗句なのか？

サンタルチア港の卵城は遠かった。

帰国の日。ナポリの空港からフランクフルトへ。2時間。乗りかえ時間はたっぷりとってある。空港に，アインシュタインがイスに座っている像があった。「御自由にどうぞのピアノ」がおいてある。日本人がふえてきた。

フランクフルトから日本へ。通路側の席で，隣は日本人。奥さんとは席が別になっている。彼は元大学教授。ドイツの史学，文学を研究していて，子供がケルンにいるという。いろいろ話す。ブログも開設していて，今回のドイツの旅についても載せている。

とったはずの列車の代金はカードからひかれていなかった。あ～、一人旅はキビシイなあ。〈完〉

気まぐれ

数学通信Ｖｏｌ．２７・　第 12 号
2014年10月7日（火）発行

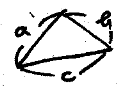
ブラマグプタの公式って？

三角形の面積を求める公式はいろいろある。「（底辺）×（高さ）÷２」がもっとも有名であろう。これは，底辺の長さと高さが分かっているときの公式だ。

3辺の長さが分かっているときには，ヘロンの公式というものがあった。3辺が分かっていれば三角形は確定する。したがって，面積も確定するはず．

（ヘロン：ギリシアの数学者．
Heron。60年前後。）

●ヘロンの公式

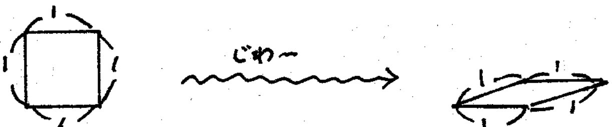


$$\left(s=\frac{a+b+c}{2}\right)$$

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

3辺ではなく4辺だったらどうなるか。それがブラマグプタの公式である。

しかし，4辺が分かっていても面積は確定しない。例えば，4辺の長さがすべて1の正方形を考えてみよう。



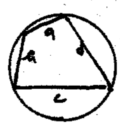
じわ～と，つぶしていくと面積は1より小さくなるのがわかる。つまり，4辺の長さが与えられていても面積は決まらない。

そこで条件を1つ加える。円に内接するとする。右の形になる。

sは周長の半分である。とくに $d=0$ とすると四角形でなく，三角形となり，ヘロンの公式に一致する。

（ブラマグプタ：インドの数学者
598～660？ Brahmagupta．）

●ブラマグプタの公式



$$\left(s=\frac{a+b+c+d}{2}\right)$$

$$S=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

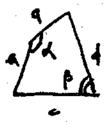
円に内接しない四角形では？

上では円に内接する―という条件をつけた。円に内接していなくても，角度に関する条件を加えると左の面積の公式もある

右の公式で，とくに円に内接するときは

$$\theta=\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\pi}{2}$$

となるので $\cos\theta=0$ となり，ブラマグプタの公式になっている。



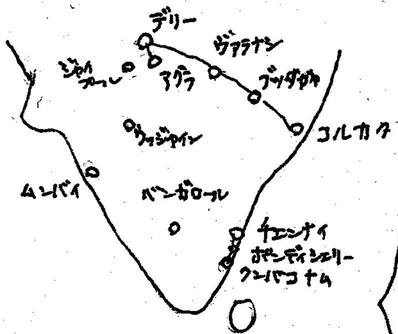
$$\left(\begin{aligned}s&=\frac{a+b+c+d}{2}\\ \theta&=\frac{\alpha+\beta}{2}\end{aligned}\right)$$

$$S=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)-abcd\cos^2\theta}$$

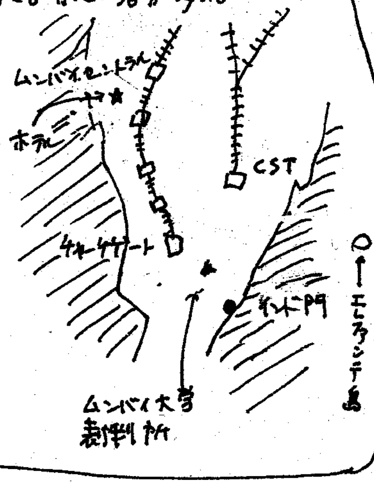
（『ボイヤー 数学の歴史 2』）

インドへ ―ブラマグプタを訪ねて　（その1）

2014年の夏，S先生はひとりインドへ旅立った。
インドへは3回目である。1回目は1996年。コルカタ（カルカッタ）から入り，ブッダガヤ，ヴァラナシ（ベナレス），デリー，アグラを訪ねた。2回目は2003年。数学者ラマヌジャンを訪ねて，チェンナイ（マドラス）からバスの旅をし，ポンディシェリー，クンバコナムへ行ってきた。まだ歩けるうちにと思い，3回目の挑戦となった。ブラマグプタゆかりのウッジャインを訪ねることを目的とし，その後の発展のインドを見たいと思った。その意味でバンガロールにも行きたかったが，余りにも広い国なのでそれは諦めた。



目指すはムンバイ（ボンベイ）。到着は夜なのでホテルは予約しておいた。また，空港からホテルまでもTaxiを予約しておいた。コルカタでもタクシーにのるときにトラブルがあったので，今回ばかりは予約した。プリペイド・タクシーでもへんな所に連れていかれるのは常識のようだ。
タクシーといってもワゴン車のような感じ。なぜか2人もいる。1時間くらい乗った。バスはない。着いたホテルはボロかった。フロントは2階で，1階の何もない所の奥の階段を上がった。何となくいかがわしい。とりあえず，ゆっくりした。
翌日。バウチャーには朝食はBoxed Breakfastと書いてあったので，廊下に出て，そこにいた人に頼む。ぺちゃんこのオムレツとコーヒーだった。なぜか40+30（ルピー）にサイン？　含まれているのではなかったのか？フロントでそれをいうと，"No problem!"。（1ルピー＝1.7円）
3泊することにしていた。とりあえずムンバイ・セントラル駅まで歩く。途中で何回か聞いた。30分位かかったか？帰りがわからなくなるといけないので曲がり角は写真にとった。長距離列車と短距離列車ではホームが分かれている。ホームのすぐそばにはスラムがある。列車からは人がはみ出している。ドアはあるが，あけておいた方が涼しいのでそうしているようだ。落ちないのだろうか。落ちてもノー・プロブレム。
売店で時刻表を買った。長距離列車の時刻表が掲示されていたので写真にとった。すると男が近づいてきた。「切符売り場はこっちにある」と言って誘導する。何となくあやしいが行ってみる。確かに，駅の外にあった。しかし，次にどこにいくかも決めていないので当然ながら買わない。
チャーチゲート駅まで乗った。5ルピー。ドア全開。インド門を目指して歩く。途中，裁判所の前で女子高校生に声をかけられた。スマホをもっていて写真をとって下さいと。何やら班別行動をしている感じだった。自分もとってもらった。インド門は近いけれど遠かった。何回か道に迷った。雨が降っている。スコール。次に，チャトラパティ・シヴァージー・ターミナルス駅（CST駅）まで歩く。小さい店が多い。
この駅は世界遺産になっている。
このCST駅の近くのコーヒー専門店に入った。やっと一息ついた。クーラーがきいている。今後のことを考える。100ルピーは高いが，それなりの価値はあった。
チャーチゲート駅までもどり，列車で再びムンバイ・セントラル駅へ。歩いてホテルへもどる。迷わずにホテルにもどれた。ホテル前のロータリーの植木に，大量のネズミともぐらがいた。
明日の予定，ウッジャインまでの切符をとることと，エレファンテ島へいくこと。



気まぐれ

数学通信Vol.27　第13号

2014年10月27日（月）発行

ゼロとブラマグプタ

ものを数えるには「1，2，3…」という言葉があればよかった。しかし，「何もない」ことを表すにはまだまだ時間の経過が必要だった。

ブラマグプタの書物『ブラフマー・スプタ・シッダーンタ』にはゼロの計算の規則が書かれている。現代の言葉で書けば

（30才のとき）

- $a>0$ または $a<0$ のとき，$a+0=a$
- $a>0$ または $a<0$ のとき，$a-0=a$.
- $a>0$ または $a<0$ のとき，$a\times 0=0$.
- $0\times 0=0$
- $a>0$ または $a<0$ のとき，$a\div 0=\frac{a}{0}$.

これはマチガイ

バビロニアで欠位を表すゼロが生まれたのは紀元前と言われる。インドでもその頃はゼロはなかったといわれている。しかし，計算対象となる立派な数と認識されたのはブラマグプタの頃からである。

ゼロ(零)は，インドではシューニア（śūnya，空）と呼ばれ，はじめは点であった。0の形がはじめて表されたのは876年といわれている。インドのジャイプールの東200キロのところにある城塞都市グワアリオルに造られた碑文に彫られた文の中に，50と270があったという。1881年北西インドで写本が見つかった。

2次方程式とブラマグプタ

2次方程式の解の公式はよく知られている。初めて導びいたのはブラマグプタといわれている。（598～660）

一例として，$x^2-10x=-9$ の解法をあげている。そこでは $x=9$ を導びいている。現代のことばでは右のようになる。

$ax^2+bx=c$ の解

$$x=\frac{\sqrt{4ac+b^2}-b}{2a}$$

しかし，ずっとたってからバスカラ（1114～1185）は複数の解について言及している。アイデアは平方完成である。

方程式 $x^2-45x=250$ の解としてバスカラは $x=50$ と -5 を与えている。そもそもギリシアの数学では負の数や0の考えはなかった。

（『数学史』（武隈良一），『カッツ 数学の歴史』，『ボイヤー 数学の歴史』，『数と数学記号の歴史』（大矢真一，片野善一郎） などを参照）

インド人 ― ブラマグプタを訪ねて（その2）

ムンバイの同じホテル。朝食はオムレツとコーヒー。なぜか大小のフォークが2つ。きのうはナイフとスプーン。

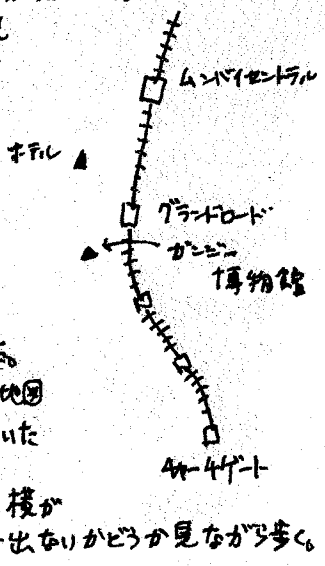
9時すぎにホテルを出て，ムンバイ・セントラル駅へ。列車の予約をしようとするがキビシイ。切符売り場に銃をもった警官。買い方がわからない。まず紙に書くらしい。書いて窓口へ。次々と割りこみ。うしろに並んでいる人はピタっとくっついている。あとで思うと，割りこみされないためかもしれない。窓口が高く，声も小さい。よくわからない。 waiting number 8 を受けとる。これが何だかわからない。どこかに表示があるのかと思って見回すが何もない。他の窓口へ行くと，「あっちだ」。また並ぶ。1時間以上いたが進展なし。

仕方がないので，別の駅に行こうとそこを離れる。すると昨日の男。「ここはインド人専用の窓口。ツーリストは別にある。100ルピーで案内する」彼はタクシーの運転手だった。ウッジャインには行けないかもしれない…と不安になっていたので，乗ってしまった。たしかにこの駅はツーリストに対応していない。安ホテルをとったためかもしれない。ツーリストは見かけない。着いたのは，切符売り場でなく，旅行会社だった。一瞬迷った。入口の写真をとっておいた。切符がとれた！インターネットである。

ムンバイ・セントラル → ウッジャイン （エアコン，寝台）

手数料は仕方ない。領収証も出してもらう。「そのあとはどこへ？」。大丈夫そうなので，ウッジャイン→ジャイプールもとった。（non AC，寝台）にした。ドルをルピーに両替した。やれやれ。再びタクシー。ところが運転手が豹変！40ドルと言い出す。冗談じゃない。ドルを見せたのがまずかった。ついに来たか。「切符をとる手助けをしてあげたんだ」うむ。たしかに助かった。「借りている車にお金がかかるんだ」30ドル払って降りた。切符がとれて安心したためかもしれない。どこかに連れていかれるかもしれない…。高いタクシー代だった。写真をとったら顔をかくした。

タクシーを降りた。駅がわからない。少年に聞いた。「あっちだ」「いや，こっちだ」歩いていくと，「こっち」と言う。ついてきたようだ。曲がると，突然。「バクシーシ」そして，3人いた1人が急に座りこみ，S先生の右足をかかえこむ。ひきたおそうとする。子供3人に襲われるのは慣れているのでふんばった。ナップザックをねらっているのか。両肩にかけていてよかった。通りかかった人が手助けしてくれた。3人の少年は10才くらいか。1人は背が高かった。



そこはチャーチゲート駅の近くだった。近くのマイダン公園でパンでも食べようかと思った。ベンチはあるが人が少ない。ここで襲われたら逃げ場がない。と思っていると老夫婦が写真をとってくれとスマホを差し出す。S先生もとってもらった。

「どこから来たのですか？」

「日本です」

「あなたたちは？」

「コルカタです」

多分裕福な人たちだろう。　　　（= マニバワン）

翌日、大雨。列車に乗る前に，ガンジー博物館にいこうと思った。チェックアウト。荷物は預けた。ガンジー博物館は近かった。スマホの地図は役に立った。外は大雨。ここはガンジーが活動の拠点としていたところだ。はじめてツーリストを見た。

ホテルにもどって出発しようとしたら，リュックがビリッといった。横が裂けてしまった。キャスターつきリュックをゴロゴロころがしながら，中身が出ないかどうか見ながら歩く。途中にリュックを売っている店は全くない。傘もさしている。

チャーチゲート駅の方が少し近代的なので，そちらへいく。駅前のカバン屋に入った。旅行用のリュックはなかった。紹介してくれた店に行って，キャスターつきのバッグを購入。リュックではなかった。

気まぐれ

数学通信 Vol. 27　第 14 号

2014 年 10 月 31 日（金）発行

ヘロン，ブラマグプタ，そして次は？

3辺の長さ a, b, c が決まっていれば三角形は確定し，面積 S は，a, b, c の式で表すことができる。それがヘロンの公式だ。（第12号参照）

4辺の長さ a, b, c, d が決まっていても四角形は確定しない。「円に内接する」という条件が加われば面積は確定する。それがブラマグプタの公式であった。

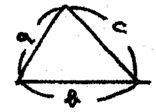
となると5辺の長さの場合はどうか——という疑問が生じる。S先生に問いかけたのは生物のI先生である。

考えてみようかと思った。

しかし，どこか頭の片隅みに記憶があった。調べてみると次のような定理があった。

> **定理**　$n \geqq 5$ を満たすどの n に対しても，円に内接する n 角形の面積を，四則演算と k 乗根をとる操作を通して辺の長さで表現する一般の公式は存在しない．

●ヘロンの公式



面積 $S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

ただし，

$s=\dfrac{a+b+c}{2}$

（周長の半分）

●ブラマグプタの公式

面積 S

$=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$

ただし，

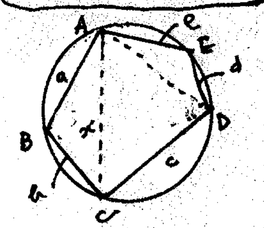
$s=\dfrac{a+b+c+d}{2}$

（周長の半分）

五角形以上ではこのような公式はないという定理である。5辺の長さ a, b, c, d, e である五角形が円に内接しているとする。この a, b, c, d, e に +, −, ×, ÷, $\sqrt[n]{\ }$ などの操作をして面積 S を求める式をつくろうとしてもできないという主張である。

証明のアイデア

うわ〜ん…



a, b, c, d, e が与えられている。補助的たxを用意する。

補助的に x を用意する。θ と π−θ も用意する。

$S=S_1+S_2$　（$S_1=\triangle ABC$, $S_2=$ 四角形ACDE）

↑ヘロン　↖ブラマグプタ

⇝ S と x の関係式ができる。⇝ S は x の4次式

⇝ 4次方程式には解の公式がある ⇝ x が上の形でとければ S もとける。（必要十分）

⇝ ところが，とけないような反例がある。

20才で死んだ

あのガロア？

（1, 1, 2, 3, 4 とすると $8x^5+81x^4+200x^3-114x^2-864x-723=0$ となり，ガロア群を計算すると，非可解群となる）

つい最近！

（「ヘロンとガロア」（数学セミナー 2009.11）。なお論文は 2007年である。）

わからなくていいですよ

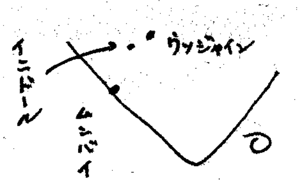
インドへ ―ブラマグプタを訪ねて（その3）

ムンバイ・セントラル駅。目指すはブラマグプタゆかりのウッジャイン。切符がとれているとは思うが，だまされたのではないかと不安になる。そのときはどこに泊まろうか？駅で時刻表を購入したが，これから乗るはずの列車は確かにある。早めにホームへ。列車には乗客の名前が書かれた紙（プリンターで打ち出されたままの紙）が張られている。あった！どうやら乗れそうだ。外は大雨。

旅に出る前から不吉な予感がしていた。旅立ちの10日前にサイフを落とした。自転車でスーパーに向かう途中落としたらしい。行ったりきたりしても見つからない。交番に届ける。クレジットカードや免許証も入っている。ひとつひとつ停止のTELをする。再発行まで時間がかかるという。するとTELあり。警察から。見つかったという。本当にありがたかった。そのまま戻ってきたのだ。また，右手の小指がささくれだっていて，ほっておいたらうんでしまった。医者に行った。

さて，列車は3段の寝台。S先生は中段。上に若い女の人。彼女はウッジャインへ行くという。エンジニアという。聞くと，コンピューター・エンジニアであった。6人の寝台は満席だ。毛布はあるがシーツはない。カーテンもない。

夜中、ケータイが鳴った。まさか自分あてのメールとは思わなかった。4つ。3つは英文。ビデオが何とか…と書いてある。インドールからだ。1つは日本から。ローマ字。折り返し電話する。何と，先日日本にTelしたのがカードで引きおとせないので停止すると。あせった。再発行がまにあったカードもあったので切り替えてもらったらOKだった。懐中電灯で，腹ばいになりながらの操作である。ウッジャインの近くのインドールからのメールについて聞いてみると，「何もしなくて大丈夫ですよ」と。あとで落ちついたときに見てみると，「インドールへようこそ」というメールだった。



朝，トイレに行った。インド式だった。ティッシュは忘れた。

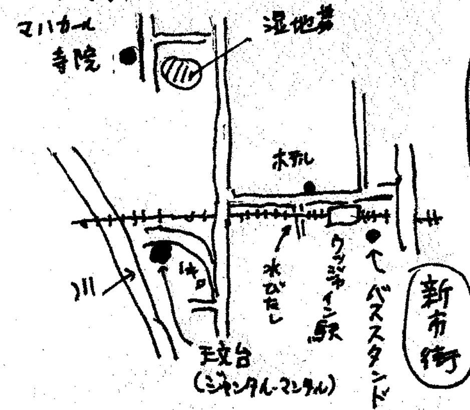
ウッジャインに着いた。どしゃぶり。駅前はしょぼい。

「どこに泊まるのか？」「タクシーは？」「ホテルは？」

としつこい。地理を知っているような顔でドンドン歩く。どこかにホテルはないかなあ。2つ目で泊まれた。

ブラマグプタは，ここUjjainの近くで生まれ，ウッジャインで暮らしていた。そこにあった天文台の台長をしていた。今も天文台がある。おそらく当時のとは違うであろう。

ホテルで一息入れてから天文台に向かう。グーグルマップを印刷してきたので方向はわかる。線路の下の連絡通路は水びたし。陸橋を渡る。途中、2,3回道を聞く。泥だらけ，水びたしで雨の中を歩くのはつらい。天文台（ジャンタルマンタル）に着いた。比較的こじんまりとしている。裏手には川が流れている。ウッジャインは観光地ではなく，ヒンドゥ教の巡礼地である。ここは1734年につくられたようだ。ホテル前の屋台でサモサとチャイ。



翌日 地下の食堂で薄いトーストとコーヒー。聖地マハカール寺院に向かう。今日も雨。線路沿い，橋の下を歩く。この辺はスラムか？道に迷う。大通りに出た。看板があったので指示に従うと湿地帯に出てしまった。ドロの中を歩く。サンダルだ。何とかマハカール寺院についたが，中には入らなかった。近くの寺院をいくつか見てホテルへ。一休み。部屋の窓にはイモリかヤモリかタモリかがはっている。ウッジャインの町中をひととおり歩く。人は多い。牛も歩いている。象も歩いている。ほこりとにおい。のどが痛くなる。口をふさぐと鼻がつらい。

ウッジャインはヒンドゥー教の7大聖地の1つとして知られている。日本の本には載っていないのでネット，インド政府観光局，ロンリープラネットなどで情報を仕入れた。

数学通信Vol. 27　第15号
2014年11月11日(火)発行

気まぐれ

コーシー・シュワルツの不等式を味わう

不等式といえば相加・相乗の関係が有名だ。その次くらいによく知られているのが，コーシー・シュワルツの不等式だろう。
コーシーとシュワルツは2人の名前だ。
証明する方法は何通りかあるが，もっとも初等的なのは

(左辺)−(右辺) ≧ 0

を示すことだろう。

● コーシー・シュワルツの不等式

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) \geqq (ac+bd)^2$$

それを整理しなおすと次のようになる。

$$\boxed{(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac+bd)^2+(ad-bc)^2}$$

これを，ブラマグプタの二平方恒等式という。

ベクトルで表現してみよう

突然だが，コーシー・シュワルツの不等式をベクトルで表現してみよう。

$$\vec{p}=(a,b),\ \vec{q}=(c,d)$$

とおくと，$|\vec{p}|^2=a^2+b^2$, $|\vec{q}|^2=c^2+d^2$, $\vec{p}\cdot\vec{q}=ac+bd$ なので，

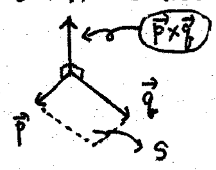
コーシー・シュワルツの不等式 $\iff$ $|\vec{p}|^2|\vec{q}|^2 \geqq (\vec{p}\cdot\vec{q})^2$

となる。何ということはない。内積 $\vec{p}\cdot\vec{q}=|\vec{p}||\vec{q}|\cos\theta$ からみれば当然の不等式だ。
さらに，ブラマグプタの二平方恒等式も次のように書ける。

ブラマグプタの二平方恒等式 $\iff$ $|\vec{p}|^2|\vec{q}|^2=(\vec{p}\cdot\vec{q})^2+|\vec{p}\times\vec{q}|^2$

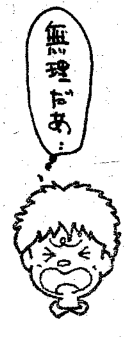
$|\vec{p}|^2|\vec{q}|^2$
$=(|\vec{p}||\vec{q}|\cos\theta)^2$
$+(|\vec{p}||\vec{q}|\sin\theta)^2$

ここで，$\vec{p}\times\vec{q}$ は，$\vec{p}$ と $\vec{q}$ の外積と呼ばれるベクトルである。
$\vec{p}$, $\vec{q}$ に対して，$\vec{p}\times\vec{q}$ は図のような向きである。大きさは図の平行四辺形の面積 S と定めたものだ。
(これが載っている『数B』の教科書もある)



なお，ブラマグプタの二平方恒等式の拡張をラグランジュの恒等式という。

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)=\sum_{k=1}^{n}(a_k b_k)^2+\sum_{1\leqq i<j\leqq n}(a_i b_j - a_j b_i)^2$$



インドへ ―ブラマグプタを訪ねて (その4)

ウッジャインからジャイプールへはエアコンなしの寝台をとっている。そのはず…。時間があるのでチェックアウトの時間を遅くした。外は雨。駅のすぐ横のバスターミナルを抜け、新市街(?)へ行ってきた。ベーカリーがあったので、夜行の友にといくつか買った。出るとバクシーシ。彼らにとってはベーカリーは高級店。駅前でチャイ。

乗る列車は23:20となっている。ジャイプールまで772キロ。ナグプール発なので、乗る車両が見つかるか不安だ。ホテルにずっといるより駅のホームで人々をみていよう。ホームでは人々は毛布(?)をしいて横になっている。蚊がやってくる。蚊とりマットをとり出す。メモを書いていると隣の老夫婦が話しかけてくる。リタイヤした銀行員であった。時々乗客名簿を見にいく。一人なので荷物をもって動く。あった！どうやら乗れそうだ。ふとみると婦人がホームの端に行ってしゃがみこむ。用を足したらしい。スッキリした顔で(?)もどってきた。少年たちもしている。牛もホームを歩いている。

列車は早めに到着。というより、自分は出発時間にあわせていたのだ。乗る車両を何とか見つけた。例によって、コンピュータから打ち出されたままのロールペーパーが列車にはられている。列車に乗りこんだ。

何と、予約したところにはもう人が寝ていた！

何でもありのインドだが、これでは困る。近くにいた若者と予約した席を確認する。すると

「レディがすでに寝ているので　こちらにどうぞ」

訳がわからない。隣のコンパートメントへいくと、若い人たちが大勢いた。気がつくとその輪の中心にいた。彼らはこの闖入者(?)に興味津津。

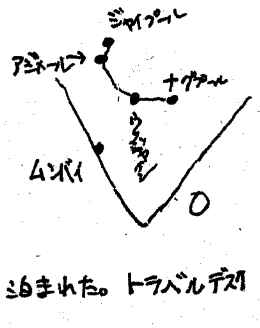
「どこから来たのか」「どこへ行くのか」「奥さんは？」「インドは好きか」

「彼女が自分のフィアンセ」「これからアジメールへいく」「みんな家族」すると隣のコンパートメントから2人。「自分の父と母です」なぜか握手。2時間くらい話していると、フィアンセが「そろそろ眠たいのでは？」　適当にゴロ寝した。

寒い。他の人は毛布をかけている。窓からは風が。クーラーはないが寒い。自分の毛布はないのかなあ。シーツはない。カーテンもない。あまりに寒いのでジャンパーを出してかけた。

朝、どこかの駅らしい。何人かは列車を降りて、ホームで何かを食べている。S先生も朝食として柿の種を食べた。フィアンセがやってきた。Good morning。気をつかってくれている。これをどうぞ―といって食べものを差し出す。もうおなかいっぱいです――と断ったら悲しい顔をしていた。しばらくして―。目の前のシートの男たちが、やはり食べものを差し出す。彼らはイスラムの人のようだ。服装はマチマチだが、見るからにイスラムの男。フィアンセは今は目だけ出して黒い服に身をつつんでいる。おばさんが―大阪のおばさんだ。強引に紙皿に朝食をもってS先生のひざに。やむなく食べる。あっさりしていておいしい。おかわりも強引に。折角出会ったんだから忘れないように写真をとりたいと。彼らもS先生もスマホで写真をとった。アジメールに着いた。

Ajmerはムスリムやヒンドゥ教徒にとって重要な土地のようだ。アジメールに着いた彼ら、彼女らとは窓ごしに握手をして別れた。もしかしたら大阪のおばさんがあのLadyだったのかもしれない。



しばらくすると靴みがき少年がやってきた。何でもありのインドだ。

ジャイプールに着いた。雨。ずっと雨。駅前はオートリキシャだらけ。ウッジャインと同じだ。ガイドブックにあるホテルを目指して歩く。水たまりを歩く。交差点も水没。車は左側通行なので日本人には助かるが、信号なし。警笛、騒音、悪臭、雨、泥水の中を歩く。何とか泊まれた。トラベルデスクが入っているのでそこにした。トラブルはいやだ。

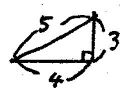
早速、「ジャイプール→デリー」の切符をとった。インドでは1日1つできればいいという。今日の仕事は終わった。

気まぐれ	数学通信Vol.27　第16号 2014年11月18日(火)発行

ピタゴラス数の一般解は？

ピタゴラス数とは，3,4,5 あるいは 5,12,13 などのように，直角三角形の辺の長さとなりうるような3つの自然数の組のことである。

$$3^2+4^2=5^2,\quad 5^2+12^2=13^2$$



これ以外にどんなものがあるだろうか。

じつは，一般解がわかっている。

右の囲みで，m, n にいろいろな数を代入してみよう。

$m=2, n=1 \rightsquigarrow 3^2+4^2=5^2$

$m=3, n=1 \rightsquigarrow 8^2+6^2=10^2$（上と同じ）

$m=4, n=1 \rightsquigarrow 15^2+8^2=17^2$

$m=3, n=2 \rightsquigarrow 5^2+12^2=13^2$

…

$a^2+b^2=c^2$　(a, b, c：自然数)

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} a=m^2-n^2 \\ b=2mn \\ c=m^2+n^2 \end{cases} \quad \left(\begin{matrix} m, n\text{：自然数} \\ m>n \end{matrix}\right)$$

見たことのある組 (3,4,5), (5,12,13), (8,15,17) が出てくる。これもブラマグプタが考えていた。(『数学史』(武隈良一))

不定方程式とは？

不定方程式とは一般には $2x+3y=1$ のように解が不定の方程式であるが，とくに「整数」とか「自然数」という条件をつけたものをさすことが多い。これをディオファントス方程式ともいう。

ところで「整数」の分野がこんどのセンター試験から出題される。

$2x+3y=1$ の解は右に載せておいた。

ブラマグプタは不定方程式

$$137x+10=6y$$

を例として解き方を示している。（『カッツ 数学の歴史』）

これは1次の不定方程式であるが，ブラマグプタは2次の不定方程式も扱っている。

また三角関数についての仕事もある。ほとんどが天文学から派生した問題のようだ。

（上の解答：~~$x=60n+10$, $y=137n+23$~~）

$x=6n+4$, $y=137n+93$

● $2x+3y=1$ の整数解を求めよう

カンで $x=2, y=-1$ を見つける。

$2x+3y=1$ ……①

$2\cdot2+3(-1)=1$ ……②

①－②より

$2(x-2)+3(y+1)=0$

$2(x-2)=-3(y+1)$

2と3は互いに素だから

$x-2=3n$

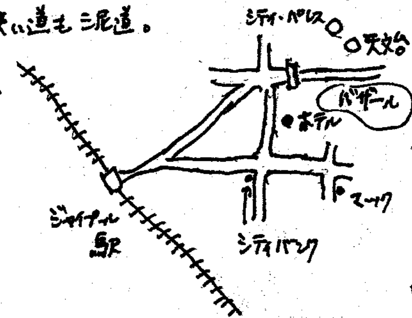
$y+1=-2n$　（nは整数）

とおける。

よって，$\begin{cases} x=3n+2 \\ y=-2n+1 \end{cases}$　（n：整数）

インドへ ―ブラマグプタを訪ねて （その5）

ジャイプールの朝。暴風雨である。雷も鳴っている。こんなに降られる旅は初めてだ。今日は天文台に行ければいいか。どしゃぶりなのでキツイ。ホテル前の狭い道も泥道。舗装はどこもしていない。サンダルである。天文台近くで日本人らしい女の人が歩いてきた。



「日本人ですか？」「No, Chinese.」

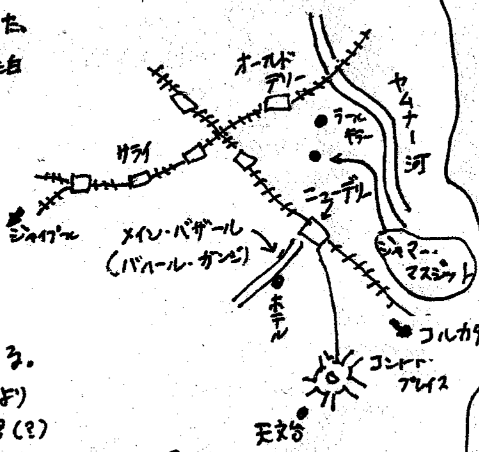
天文台の場所をきくと、すぐ先だという。人は少ない。200ルピー。この天文台はとても広い。1728年につくられ，1901年に修復。日本人の男にあった。彼はデリーから回ってきた。名古屋市立大の3年生。海ペンであった。それはいい。そんな方法は気がつかなかった。

見学ののち駅までオートリキシャでいく。駅の構造を把握。そのあと再びブラブラ歩いてマックへ。入口にはやはり物乞いがいる。入口には警官も。マックは高級店なのだ。歩いていたらサンダルがこわれた。

夜中に急に寒けがした。まずい。「すぐひえ」で冷やした。ジャージの上に短パンをはいた。ジャンパも着こんだ。朝おきたときは大丈夫だった。インドの雨にやられたのかもしれない。

翌日 6時ジャイプール発の列車（シャタブディ急行）でデリーへ。300キロある。隣の席は親子。何と子供をひざにかかえている。いいのか。おかげで狭い。着いたのはニューデリー駅ではなく、手前のサライ駅。その駅の1つ前にも停車していたが，そこはスラムだった。線路わきはゴミの山。サライ駅からニューデリー駅まで列車でいこうとしたが，何人かにきくとオート・リキシャでいけという。駅前でひろう。雨は降っている。

デリー駅についた。ますます大雨。しばらく構内にいた。小降りになったのをみて町中へ。メインバザールに宿をとった。一泊1200ルピー。まあ，いいだろう。最後のホテルだ。



ほしいもの、サンダルと水。ホテル前の店でサンダルを売っていた。150ルピー。どうやら160ルピーを出したらしい。10ルピーがもどってきた。こんなことは初めてだ。

コンノート・プレイスと天文台へ。全部歩きだ。コンノート・プレイスはイギリス風の雰囲気のある町だ。スタバもマックもある。天文台はウッジャインのより大きいが，ジャイプールのよりは小さい。

翌日、ジャマー・マスジットへ。旧市街にある巨大モスクである。ニューデリー駅をこえて歩いていったが道をまちがえて思ったより遠くかんじた。観光地であった。ツアーの日本人らしい母娘（?）が出てくるところに遭遇。「高いですよ」「カメラもちこみ料とられますよ」「短パンはダメで，かけるものを借りなくちゃ」雰囲気だけを味わった。

ニューデリーは2回目なのでポイントをしぼって見て回った。以前泊まった100ルピーのホテルもあった。いよいよ帰国となる。空港へはタクシーで行った。なぜか途中で1人がのりこんできた。途中で降りたと思ったら，別の人が乗ってきた。空港まで。タダ乗り？そんなことあり？ここはインドなのだ。

空港で時間をつぶしていると日本人の親子。女2人だけのツアーだと言う。また。チェックインに並んでいると日本人のおばさんが親しそうに声をかけてきた。コルカタのマザー・テレサの家にボランティアに行ってきたという。ナースだ。ずっとしゃべっていた。おばさんかと思ったが，自分より若かった。

インドでは何でもありだ。どこでもトイレ。チリ紙は使わず，手桶。ずっと警笛、車線はなし。バイクは5人乗り。トイレや洗面所からは泥水がでてきた。ホテルで10ドル両替したら少ないようだったのでそれを言うと追加された。高いものは食べないので下痢はしなかった。帰る日，H先生とN先生にメール。

帰国してまだ3ケ月なのに妙になつかしい気がする。〈完〉