# 関孝和314年祭
## —経緯，関孝和の履歴と業績—

水玉堂

於数学月間の会講演

2022年7月22日15：30 —17:00

真島秀行

（お茶の水女子大学名誉教授）

# 講演概要

- 関孝和先生は，上毛かるたに「和算の大家関孝和」と称えられる江戸時代前期の当時の世界的業績を残した数学者です．．関先生は宝永5年10月24日（1708年12月5日）没，東京都新宿区弁天町の浄輪寺に葬られている.
- 今年2022年は没後314年で円周率に関して世界的な業績を残されていることから，通常は記念年とはしない年に314年祭を数年前から提案してきた．円周率の近似分数22/7に因む今日の講演で，その経緯，関先生の履歴と業績を中心にお話しさせていただくこととする

# 淨輪寺　関孝和先生墓域写真

# 経緯1/2

- 2022年に関孝和314年祭を行うことを学会や研究集会で提唱し，2022年の全国和算研究大会をそれに因んで行うこととし世話人を2018年夏の第15回全国和算研究大会の打ち合わせの際に引き受けた．その後，2022年が数学関係の様々な記念の年であることを学会講演などで説明しているが，COVID－19の感染拡大のため，全国和算研究大会は中止，延期となり見通せなくなった．
- 浄輪寺に円周率の記念碑を建てることをしてはどうか，と考え2021年度の日本数学史学会に提案し，講演者が呼びかけるとした．

# 経緯2/2

- 浄輪寺のご住職とは2007年依頼，懇意にしていただいており，ほぼ毎年墓参し，以前より関孝和314年祭についてはお話ししており，また記念碑についても2021年に連絡し，東京都の許可が必要と考え教育庁文化財担当に連絡を取ってもらったところ，教育委員会の担当者が，具体的な案が出れば現地で立ち合いのもと確認したい，とのことで，2021年6月8日9時に来ていただくことになっていた．墓域の外であれば可能となった．石材店にも相談し，記念碑デザインはほぼ決まっている．記念碑建立と講演会等が関孝和先生314年祭の中身となる．

# 2022年が記念年となる数学関係事項1/2

- 毛利重能著，『割算書』（元和8年（1622））発刊後400年
- 吉田光由350年忌．吉田光由の没年が寛文12年（1672）と出ているものが多いが，没年月日は寛文12年11月21日で，寛文12年の11月，12月は大の月で間に閏月なし，寛文13年（9月21日に延宝に改元）1月1日は1673年2月17日であるから40日前の1673年1月8日が西暦での没年月日となる．
- 建部賢弘著，「綴術算経」「不休綴術」（享保7年（1722）序）から300年
- 山路主住250年忌，山路主住の没年を安永元年（1772）とするものがあるが，没年月日は安永元年12月11日で，安永元年の12月は大の月，閏月なし，安永2年1月1日は1773年1月23日であるから20日前の1773年1月3日が西暦での没年月日となる．没後250年ではないが，250年忌になる．
- 内田五観，算学塾を開きマテマテカ塾と称した文政5年（1822）から200年（［2］では総統就任後何年かしてからとあるが［3］ではこの年としている．）

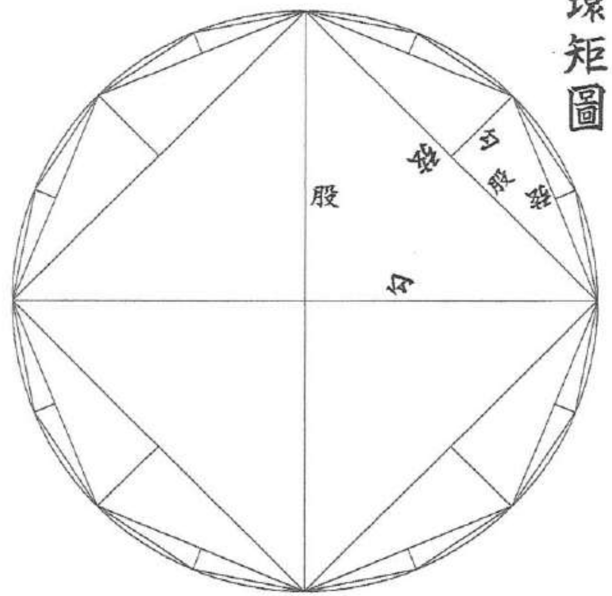
# 2022年が記念年となる数学関係事項2/2

- 学制頒布，明治5年（1872）から150年
- （太陰太陽暦から太陽暦への改暦から150年でもある．）
- 高木貞治の類体論に関する第2論文発表の1922年から100年
- 毛利重能顕彰碑建立（昭和47年，1972）から50年
- 小平邦彦が平成9年（1997）に没してから25年
-
  - 2022年4月からは，高等学校学習指導要領も新しいものが適用され，数学数学史，数学教育，数学教育史の記念の年となる．
  - なお，その5年後の2027年は次のことがある．
- 『塵劫記』が寛永4年（1627）発刊から400年
- 東京数学会社（日本数学会の前身）が明治10年（1877）創立されてから150年

# 石碑のデザイン：下記のような石碑を作成し墓域内に設置

- 上面：『括要算法』の環矩図
- 左面：『括要算法』の圓率解の「第一　・・・」
- 正面：『括要算法』の第二　求定周の本文全部
- 右面：『括要算法』の第三　求周径率の文のところ
- 背面：関新助孝和先生三一四年祭記念碑文として，関先生の円周率計算に対する貢献と，ほかの業績や権威にとらわれず，独自の結果から「3.14159265359微弱を定周となす」と宣言された偉大さに敬意を表す文を記す．

環矩圖



# 近似分数22／7の成り立ち

$$\frac{22}{7}=\frac{3+4+3+3+3+3+3}{1+1+1+1+1+1+1}$$

（関孝和の零約術の過程で7番目に出てくる）

$$\frac{22}{7}=3+\frac{1}{7}$$

（３．14の連分数表示の部分）

$$3.14=3+0.14=3+\frac{14}{100}==3+\frac{1}{7+\frac{2}{14}}$$

# 背面の文章案(これから削減)

- 関孝和314年祭記念円周率碑

関孝和先生は円周率の近似値計算について，世界に先駆けた数列の加速法を含む方法も用いた．門下の荒木村英等が没後に発刊した『括要算法巻貞(第四巻)』(正徳二年正月上旬刊)の「求圓周率術」に収録されており，その主要な結果として，内接正131072角形の周長，3.14159265359微弱を定周に採用，355/113が小数第6位まで合う近似分数と確認したことを刻し，円周率に因んだ没後三百十四年祭の記念碑として墓碑近くに遺すこととした．高弟の建部賢弘　は関先生の方法をさらに改良し，三百年前「綴術算経」(享保七年正月七日序)に小数第41位まで正しい数値3.14159265358979323846264338327950288419716898強を定周として得た計算を記していることも付言する．

- 令和4年12月5日建立
- 関孝和314年祭記念事業実行委員会

# 和算

- 江戸時代に発展した日本の数学で，庶民向けには，そろばん指南書の『割算書』（元和八年（1622年），毛利重能著），『塵劫記』（寛永四年（1627年），吉田光由（1598～1672）著）があり，特に『塵劫記』は何度も改訂され，海賊版も多く初等数学の本として広まった．
- 一方，中国から移入した方程式の解法などのより高度な数学は独自の発展を遂げ，武士や名主，町人等の間では，特に関孝和の研究を受け継いだ関流算学が一番広まった．

# 関孝和（?～1708）

- 甲府藩で，小十人組御番，小十人組頭，賄頭，勘定頭差添筋と昇任，将軍嗣子の主君に伴い
- 幕臣として，西の丸の御納戸組頭
- 『発微算法』（1675刊），『括要算法』（1712年刊）
- 傍書法という筆算法により筆算代数の数学を確立，今日の行列式，終結式を導入し，円周率の計算も級数の加速法を用いるなど先駆的な業績を残した．また，暦算に関心をもち，授時暦を研究し，日本用の太陰暦の作成のための計算も行った．

# 関流算学の流れ

- 関孝和( 1643？～1708）
- 建部賢弘（1664～1739），荒木村英（1640～1718）
- 松永良弼（1692～1744），久留島義太（？～1757），中根元圭（1662～1743）
- 山路主住（1704～1772）
- 安島直圓（1732～1798），藤田定（貞）資（1734～1807），有馬頼徸（1714～1783）
- 日下誠（1764～1839）
- 内田恭（五観）（1805～1882）

# 関流算学第三伝山路主住

- 中根，松永，久留島らに関流の和算を学び，関，松永の著書の解説，教科書の編集に功績を残し，免許制度の基礎を確立した．関流三伝．徳川吉宗の下，宝暦の改暦に関わり，その後，幕府天文方にも任命された．仙台の門人である戸板保佑が関流和算書を写し500冊ほどが今日残っている．安島直圓，藤田定資，有馬頼徸など，関流の発展に大きな影響を及ぼした門人を多く輩出した．

# 関新助孝和先生の履歴の研究

- 関孝和三百年祭記念事業の際に実行委員長となり，いくつか調査し結果については，日本数学史学会誌「数学史研究」や京都大学数理解析研究所「講究録及び講究録別冊」に論文等として発表してきた．
- 講演者が2009年に初めて明かした，関新助孝和先生の甲府藩のある分限帳の内容と幕臣としての履歴を掲載する．

# 御勘定の関新助

本国常陸　　　　養父十郎右衛門　実父内山七兵衛
弐百五拾俵　生国武蔵　　　　　　関　　新助
御役料拾人扶持　　　　　　　　　辛巳五十七

寛文五乙巳年養父十郎右衛門病死　同年跡式被　仰付　御切米高百三拾俵之内百俵被下之　小十人組御番被　仰付
同七丁未年三人扶持被下之
同十庚戌年　御足米拾俵被下之
延宝八庚申年　小十人組与頭被　仰付　御加増九拾俵被下之　三人扶持者上ル
元禄五壬申年　御賄頭被　仰付
同十四辛巳年　御勘定頭ニ差添可相勤旨被　仰付　御加増五拾俵御役料拾人扶持被下之

養父十郎右衛門儀　慶安四辛卯年御帳面ニ而被為附之
病死之節者　小十人組御番相勤申候

# ある分限帳の記載（１）

（１－１）関新助　辛巳五十七

（１－２）実父内山七兵衛

（１－３）生国武蔵

（１－４）養父関十郎右衛門

（１－５）本国常陸

（１－６）弐百五拾俵御役料拾人扶持

# ある分限帳の記載（２）

（２）寛文五乙巳年父十郎右衛門病死，同年跡式被　仰付，御切米高

百三拾俵之内百俵被下之，小十人組御番被仰付

（３）同七丁未年三人扶持被下之

（４）同十庚戌年　御足米拾俵被下之

（５）延宝八庚申年　小十人組与頭被　仰付　御加増九拾俵被下之　三人扶持者上ル

# ある分限帳の記載（3）

**（6）元禄五壬申年　御賄頭被　仰付**

**（7）同十四辛巳年　御勘定頭ニ差添可相勤旨被　仰付　御加増五拾俵**

**御役料拾人扶持被下之**

（御勘定方御用改（役），御勘定頭差添筋とも他甲府分限帳のでは書かれ，幕臣用語で勘定（方）吟味役と書かれることもある）

**（8）養父十郎右衛門儀　慶安四辛卯年御帳面ニ而被為附之**

**病死之節者　小十人組御番相勤申候**

# 幕臣としての関新助孝和の履歴

宝永元年12月12日　西の丸（西城）御納戸組頭となる．年俸250俵，役料拾人扶持，のち改められ，廩米300俵

（宝永3年10月1日　養子新七郎久之を将軍に御目見）

宝永3年11月4日　致仕，小普請

宝永5年10月24日＝西暦1708年12月5日　逝去

（「寛政重修諸家譜」及び「年録」による）

# 関孝和先生の履歴1／2

寛文5年11月23日　亡養父十郎右衛門跡目相続

寛文5年12月21日　小十人組の番士として出仕

寛文7年正月18日　三人扶持を加増

寛文10年　加増

延宝8年　小十人組頭

元禄8年9月の前　賄頭（高200俵，役料拾人扶持）として勤仕

# 関孝和先生の履歴2／2

元禄14年　　　　　　御勘定方御用改（役）＝勘定（方）吟味役＝御勘定頭差添筋に昇任し，50俵加増され250俵，役料として拾人扶持

宝永元年12月12日　西の丸（西城）御納戸組頭となる．年俸250俵，役料拾人扶持，のち改められ，廩米300俵

宝永3年11月4日　致仕，小普請（宝永3年10月1日　養子新七郎久之を将軍に御目見）

宝永5年10月24日＝1708年12月5日　逝去

（「寛政重修諸家譜」及び「年録」による）

# 関孝和先生誕生年の新説

- 祝い年に出版があったと考えると寛永20年（1643年2月19日から1644年12月2月7日）になると推測されることに気付いたこ．荒木村英と大高由昌が関わった『括要算法』（宝永 6年冬の序文，跋文）は正徳2年正月に刊行であり，建部賢弘著「綴術算経」の序文は享保7年正月7日（1722年2月22日）で，関孝和先生誕生年を知っていたであろう直弟子が関先生が生きておられたらそれぞれ古希，傘寿の祝い年のことと考えれば，関先生の生まれ年は寛永20年になる．

# 関孝和先生の業績の概略

- 代数方程式の消去法，終結式や行列式，代数方程式の数値解法，解の分類，整数係数1次連立方程式の整数解，正多角形の内接半径と外接半径の関係式，いくつかの条件下での関数の多項式近似，べき和の公式，円周率の小数近似値として3.14159265359微弱，近似分数として分母が113に至るまでのものを一連の手続きで計算，円弧長の近似式，球の体積と表面積の関係式，求積，魔方陣，算脱等の研究成果を残した．また，太陰暦作成のための元時代の授時暦の研究等がある．

# 解伏題之法（重訂）　関孝和編

- 多元高次方程式から未知数を一つずつ消去する方法を述べていて，その過程で今日の終結式および行列式を導入している．
- 行列式については，まず逐式交乗法で4次行列まで表現し，これ以上は項数が甚だしく多くなるので交式斜乗に代えると宣言し，その方法を述べているが5次行列式は正しくない．

# 解伏題之法（重訂）の逐式交乗の方法について

- １．逐式交乗により出てくる式は，別紙のような計算で　説明する方法により導いたと考えられる．
- ２．逐式交乗の表は，消去する項に振った番号の若い順に上下上下上下と書いている．
- ３．なお，交式斜乗については小松・後藤の解釈で正しく，級（次数）について順列を表し，定数項についての展開になっている．ただし，彼らが提唱したような逐式交乗の表の修正は，2に述べた理由により必要ない．

# ①解伏題之法について

- 解伏題之法（天和癸亥重陽日重訂）（天和癸亥重陽日は天和3年9月9日で，天和3年元日が1683年1月28日に相当し，天和3年の1,3,5,7月が大の月，2，4，5閏，6,8が小の月であったことから，-1+1-1-1-1+29-1-1-2=22だから1683年10月1日に該当する．）に多変数多項式の変数消去法に関連して今日の行列式を関孝和は導入していると看做せる．

# ②－１：逐式交乗法１

- ２つの多変数多項式から１変数を消去するのに，１変数の各次数の項を一つ消去する方法をとっていることから，３連立２次方程式の１変数消去に際して，途中で使うすべての式を書いて相消し合う項もすべて書き上げている．すなわち，元の３連立２次方程式の各係数それぞれに2つの単項の積を乗じ，適切な符号（生尅）を付けて（それぞれ3つの式からなる）２つの表にし，すべてを足し合わせたとき，相消し合う項には同じ番号を振って計算を検証できるようにしている．

# 自然で上手な計算

$$a_0 + a_1 y + a_2 y^2 = 0 \cdots ①$$

$$b_0 + b_1 y + b_2 y^2 = 0 \cdots ②$$

$$c_0 + c_1 y + c_2 y^2 = 0 \cdots ③$$

$$② \times c_2 - ③ \times b_2 : (b_0 c_2 - c_0 b_2) + (b_1 c_2 - c_1 b_2) y = 0$$

$$② \times c_1 - ③ \times b_1 : (b_0 c_1 - c_0 b_1) + (b_2 c_1 - c_2 b_1) y^2 = 0$$

$① \times (b_1 c_2 - c_1 b_2) - a_1 (② \times c_2 - ③ \times b_2) + a_2 (② \times c_1 - ③ \times b_1)$より

$$a_0 (b_1 c_2 - c_1 b_2) - a_1 (b_0 c_2 - c_0 b_2) + a_2 (b_0 c_1 - c_0 b_1) = 0$$

$① \times (b_1 c_2 - b_2 c_1) - ② \times (a_1 c_2 - a_2 c_1) + ③ \times (a_1 b_2 - a_2 b_1)$と同じで

$$a_0 (b_1 c_2 - b_2 c_1) - b_0 (a_1 c_2 - a_2 c_1) + c_0 (a_1 b_2 - a_2 b_1) = 0$$

# 伏題にある終結式・行列式への注意

- よく使われる説明として，**①と②，及び①と③から2次項を消した1次式を２式導き**，**それらから1次項をさらに消した式を得る**，という方法では，**余計な係数がかかり定乗（消去した後の式の次数）の評価が本来のものより大きくなり甘くなる**ので，その方法は**採用しないと**考えられる．
- **井関らは上のような計算式で説明をしているが自然な方法は知らなかったと**考えられる．

# 余計な係数がある下手な計算

$$a_0 + a_1 y + a_2 y^2 = 0 \cdots ①$$

$$b_0 + b_1 y + b_2 y^2 = 0 \cdots ②$$

$$c_0 + c_1 y + c_2 y^2 = 0 \cdots ③$$

$①\times b_2 - ②\times a_2 : (a_0 b_2 - b_0 a_2) + (a_1 b_2 - b_1 a_2) y = 0$

$①\times c_2 - ③\times a_2 : (a_0 c_2 - c_0 a_2) + (a_1 c_2 - c_1 a_2) y = 0$

$(①\times b_2 - ②\times a_2)\times(a_1 c_2 - c_1 a_2) - (①\times c_2 - ③\times a_2)\times(a_1 b_2 - b_1 a_2)$より

$(a_0 b_2 - b_0 a_2)(a_1 c_2 - c_1 a_2) - (a_0 c_2 - c_0 a_2)(a_1 b_2 - b_1 a_2) = 0$

これを展開して８項あるが，$a_0 b_2 a_1 c_2 - a_0 c_2 a_1 b_2 = 0$で６項残り

$$a_2 \left\{ a_0 (b_1 c_2 - b_2 c_1) - b_0 (a_1 c_2 - a_2 c_1) + c_0 (a_1 b_2 - a_2 b_1) \right\} = 0$$

# 注意

- 加藤平左エ門氏が（昭和15年，紀元2600年に表し，藤原松三郎氏が序文を寄せている）「円理および行列式」に書かれた（第１式と第２式から2次項を消し1次式を得，第１式と第３式からも2次項を消し1次式を得て，それらから1次項を消すという）共通項で割る必要のある計算ではなく，講演者が長年線形代数の講義で用いてきた（第２式と第３式から2次項を消した式と，１次項を消した式を得て，それらの２次項の係数と1次項の係数が同じ2次行列式の形であることより，第１式を使って1次項と2次項を一気に消し，６項がきれいに出てくる方法で，今日の行列式論では，第１式の係数による展開をしたものにもなっていることがわかる）計算方法に気付いて，それにより逐式交乗の表を作成したと考えられる．

# ②－２：逐式交乗法

- その際，（今日の行列式論では，0次の係数ベクトルを第１列と見て，第１列による展開と看做せる）最終的に残る項だけを書くのではなく，途中で使うすべての式を書いて相消し合う項もすべて書き上げている．すなわち，元の３連立２次方程式の各係数それぞれに2つの単項の積を乗じ，適切な符号（生尅）を付けて（それぞれ3つの式からなる）２つの表にし，すべてを足し合わせたとき，相消し合う項には同じ番号を振って計算を検証できるようにしている．（関の3次行列の表）

# ③4次行列の逐式交乗表

- ４連立３次方程式の１変数消去に際しても，同様の方法によったと考えられる．すなわち，元の4連立3次方程式の各係数それぞれに3つの単項の積を乗じ，適切な符号（生尅）を付けて（それぞれ4つの式からなる）６つの表にし，すべてを足し合わせたとき，相消し合う項には同じ番号を振って計算を検証できるようにしている．逐式交乗の表として6つの表をまとめて書く際には，相消し合う番号の若い順に上下上下上下と書いた．

# ④4次行列の場合の交式斜乗

- ４連立３次方程式の１変数消去のための逐式交乗の表を再度見直すと，隣あるいは上下を見ると，元の係数の表と級（次数）について偶置換をしてえられる2つの表，合わせて3つの表の右斜乗と左斜乗によってできる4×３×２項から，４次行列式はなっていることを見てとった．

# ⑤5次行列の場合

- ５連立４次方程式の１変数消去のためには項数が多くなり過ぎるから，逐式交乗の表を書く代わりに「交式斜乗」によって代えることとする，と宣言して，２次，３次，４次行列式の項の作り方を，交式と斜乗による計算図式を示し，４次行列式の交式は3次の場合から作られるとした．これは4次までは正しい．さらに5次行列の項の作り方を，交式と斜乗による計算図式を示しているが，５次は正しくない．

# ⑥－１:5次行列の場合の誤った点

- すなわち，５連立４次方程式の逐式交乗の表を書こうとするならば，それぞれ5式からなる（４次行列式の項数に等しい）４×３×２個の表が必要なはずであり多くの（１２０×５＝６００）項を書くことになる．それの代わりに交式斜乗に代える，という．それが，もし5次行列に対する交式斜乗による計算図式でできるとすれば，元の係数の表とそれから作り出される合計１２個の交式が必要なはずである．

# ⑥－２:5次行列の場合の誤った点

- １２個の表の（０次の係数を並べた）第１列は固定する．（１次から４次までの係数を並べた）第２列から第５列までの間に適当な置換を施して得られる表を作るために４次の場合から交式を作るとしているが，４次行列式の項数は４×３×２個分の表のうち，左右斜乗が１つの表から得られるなら，半分の１２個で済む．４次の置換の総数は４×３×２＝２４個だが，偶置換のみ考えると半分の１２個で，関が書き残しているのは，恒等置換，(23)(45), (24)(35),(25)(34),(345), (243), (254),(235),(354),(253),(234),(245)という偶置換であったが，これらから得られる斜乗として，元の係数の添え字を,mn(m,n=1,2,3,4,5)とすれば，例えば，(23)(45)で作った表の右斜乗として添え字，11,32,23,54,45，の項があり，(24)(35)で作った表の左斜乗としても添え字，11,32,23,54,45，の項があるので足し合わせたとき相消し合って0になるか，符号を変えても同じ項が2倍になって出て来てしまうので5次の行列式にはなり得ないのである.

# ⑦5次行列の場合の修正法

- しかし，元来の５連立４次方程式の逐式交乗の考え方は正しいのであって，表を書こうとするならば，それぞれ（最終的に残る5項と相消し合う20項を含む）５式からなる（４次行列式の項数に等しい）４×３×２個の表より１２０項からなる行列式を得たはずである.

# 行列式の業績のまとめ1／2

- 　第六回全国和算研究大会でも講演させてもらったが，あまりよく伝わっていないように思うのでいくつかのところで繰り返し話している．
- 関孝和の行列式論としては，逐式交乗の方式を2次，3次，4次の場合に遂行し表に纏めて書いてあり，その方式を5次以上にしても行えることを十分に示唆している．そして，4次の場合の表から適切に組み合わせてみると“交式斜乗”に書き換えられることを見出している．

# 行列式の業績のまとめ2／2

- そして，5次以上もそうであるとし5次の場合の“交式”と“斜乗”の図を書いてあるが，それは間違えている．“交式斜乗”も小松・後藤の指摘のように“交級斜乗”としなくてはならなかったが．
- 繰り返すが，逐式交乗のアルゴリズムは正しいし，４次について書かれた表はあくまでも逐式交乗の結果をまとめたものであり，（小松・後藤が指摘するような）修正は必要はない．

# 関孝和先生の円周率の業績

『括要算法』に書かれている方法:

１. 辺数順次等倍増加法による円周率計算

正 $2^{17}=131072$角形まで計算し次を得た

**<u>3.1415926532</u>2889 927759**

２. 増約術 を用いた円周率計算で次を得た

**<u>3.14159265358979324</u>76**

**3.14159265359微弱を定周とした**

３. 近似分数による円周率計算 $\dfrac{355}{113}$ を得た

關自由先生遺錄
著顯古今未發

# 括要算法

擴充諸家至寶

書津堂藏版

## 括要算法序

夫為數之道其源出於聖人而其來遠矣故理甚向上而非未得為得之淺識也然至圓法孤矢弦等與旨則兀〻而如煩如惱難決可非以此見一法合為

依環矩術得徑一之定周而以零約術得徑一百一十三周三百五十五合問

求積者列圓徑冪以周率三百五十五相乘得數爲實列徑率一百一十三四之得四百五十二爲法實如法而一得圓滿之積而已

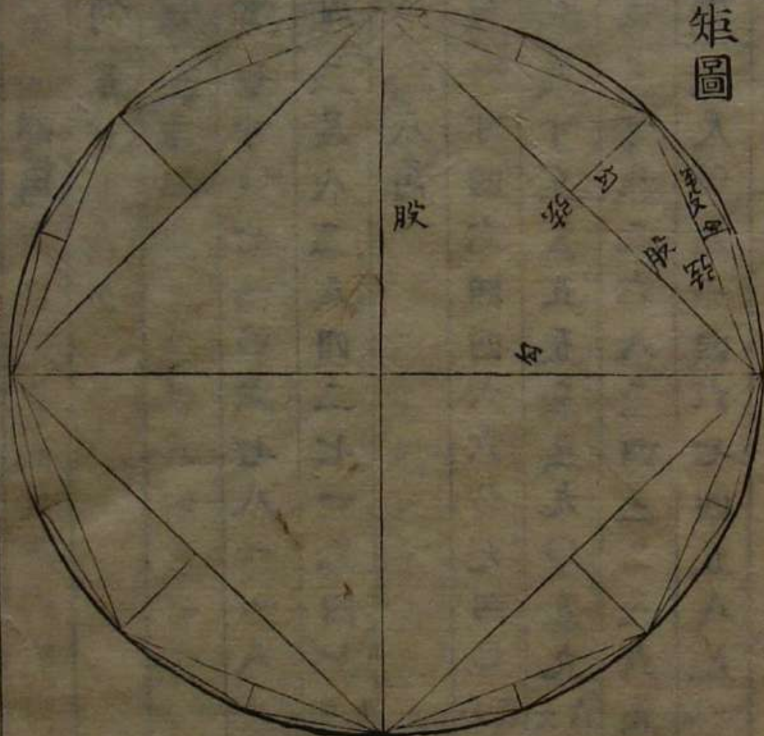
求周率如左

圓率解

第一

徑一尺圓內如圖容四角次容八角次容一十六角次容三十二角次第如此至二十一萬一千零七十二角各以勾股術求弦以角數相乘之各得截周各所得勾股弦及周數列于後

環矩圖



周　三尺一四一五八七七二五二七七一五九七〇〇八弱

二千零四十八角

勾　二忽三五三〇九五二一一九一四二强

股　一釐五三三九七八三八一四八二九八八一强

弦　一釐五三三九八〇一八六二八四七六五六强

周　三尺一四一五九一四二一五一一一九九九七四一强

四千零九十六角

勾　五微八八二七四一四九〇四五微强

股　七毫六六九九〇〇九三一四二三八二八微强

弦　七毫六六九九〇三一八七四二七〇四五强

周　三尺一四一五九二三四五五七〇一一七七四二五弱

八千一百九十二角

勾　一微四七〇六八五五八八九〇四强

股　三毫八三四九五一五九三七一三五二三弱

弦　三毫八三四九五一八七五七一三九五六弱

周　三尺一四一五九二五七六五八四八七二六六六八强

一萬六千三百八十四角

勾　三纖六七六七一四一〇七四四强

股　一毫九一七四七五九三七八五六九七八微弱

弦　一毫九一七四七五九七三一〇七〇三三微强

周　三尺一四一五九二六三四三三八五六二九九〇八强

三萬二千七百六十八角

| | |
|---|---|
| 勾 | 九沙一九一七八五三五三一微弱 |
| 股 | 九絲五八七三七九八六五五三五一七弱 |
| 弦 | 九絲五八七三七九九〇九五九七七三強 |
| 周 | 三尺一四一五九二六四八七七六九八五六七〇八弱 |

六萬五千五百三十六角

| | |
|---|---|
| 勾 | 二沙二九七九四六三四三六弱 |
| 股 | 四絲七九三六八九九五四七九八八七弱 |
| 弦 | 四絲七九三六八九九六〇三〇六六九弱 |
| 周 | 三尺一四一五九二六五二三八六五九一三五七一強 |

一十三萬一千零七十二角

| | |
|---|---|
| 勾 | 五塵七四四八六五八六二強 |
| 股 | 二絲三九六八四四九八〇一五三三四強 |
| 弦 | 二絲三九六八四四九八〇八四一八二強 |
| 周 | 三尺一四一五九二六五三二八八九九二七七五九弱 |

第二　求定周

列三萬二千七百六十八角周與六萬五千五百三十六角周差以六萬五千五百三十六角周與一十三萬一千零七十二角周差相乘之得數爲實列三萬二千七百六十八角周與六萬五千五百三十六角周差內減六萬五千五百三十六角周與一十三萬一千零七十二角周差餘爲法實如法而一得數加入六萬五千

五百三十六角周得三丈一寸四分一釐五毫九絲二忽六微五纖三沙五塵九埃微弱為定周

第三　求周徑率

周率三徑率一為初以周率為實以徑率為法實如法而一得數一位定尺少於定周者周率四徑率一多於定周者周率三徑率一各累加之其數列于後

古法

| 周率 | 徑率 | 周數 |
|---|---|---|
| 三 | 一 | 三整 |
| 七 | 二 | 三五整 |
| 一十 | 三 | 三三三三三三三三三三強 |
| 一十三 | 四 | 三二五整 |

密率智術

| 周率 | 徑率 | 周數 |
|---|---|---|
| 一十六 | 五 | 三二整 |
| 一十九 | 六 | 三一六六六六六六六七弱 |
| 二十二 | 七 | 三一四二八五七一四三弱 |
| 二十五 | 八 | 三一二五整 |
| 二十九 | 九 | 三二二二二二二二二二強 |
| 三十二 | 一十 | 三二整 |
| 三十五 | 一十一 | 三一八一八一八一八二弱 |
| 三十八 | 一十二 | 三一六六六六六六六七弱 |
| 四十一 | 一十三 | 三一五三八四六一五四弱 |
| 四十四 | 一十四 | 三一四二八五七一四三弱 |
| 四十七 | 一十五 | 三一三三三三三三三三強 |

| | | |
|---|---|---|
| 三百二十七 | 一百〇四 | 三一四四二三〇七六九強 |
| 三百三十 | 一百〇五 | 三一四二八五七一四三弱 |
| 三百三十三 | 一百〇六 | 三一四一五〇九四三四微弱 |
| 三百三十七 | 一百〇七 | 三一四九五三二七一微強 |
| 三百四十 | 一百〇八 | 三一四八一四八一四八強 |
| 三百四十三 | 一百〇九 | 三一四六七八八九九一弱 |
| 三百四十六 | 一百一十 | 三一四五四五四五四五強 |
| 三百四十九 | 一百一十一 | 三一四四一四四一四四強 |
| 三百五十二 | 一百一十二 | 三一四二八五七一四三弱 |
| 三百五十五 | 一百一十三 | 三一四一五九二九二微強 |

如右求周數至周三百五十五徑一百一十三而比之

定周雖有微不盡欲令之適合則周徑率及繁位故以此而今爲定率也

求弧術 乃圓率用周三百五十五尺徑一百一十三尺

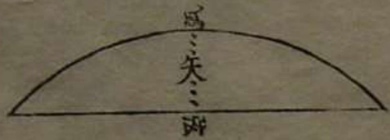
今有弧形只云弦八寸矢二寸則

問弧若干

答曰大弧九寸二分七釐二毫九絲五忽三微強

小弧六寸四分三釐五毫〇一忽一微六纖強

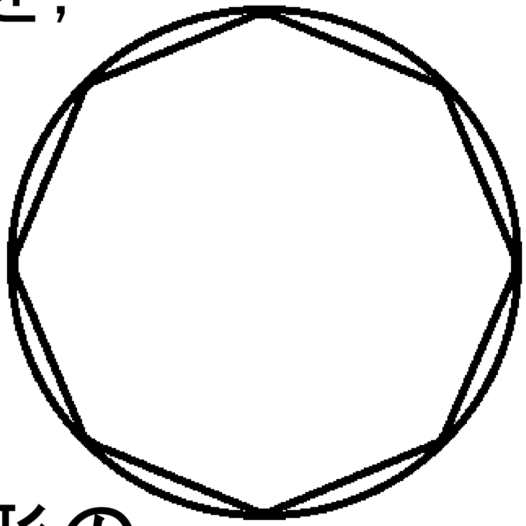
弧矢弦圖




術曰立天元一爲大弧〇｜自之爲大弧冪〇〇｜寄

# 辺数順次等倍増加法

- 円に内接する正多角形の辺数を，正方形から次第に倍にする
- 円弧を弦に近似して考える



- 設定

直径1の円に内接する正 $2^n$ 角形の

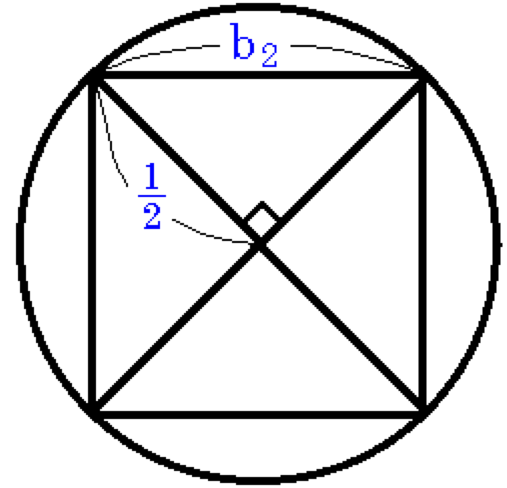
一辺　$b_n$　，周長　$L_n = 2^n b_n$

# 手順① $b_2$ , $L_2$ を計算

内接する正方形(右図)を
考えれば,

$$b_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$L_2 = 4b_2 = 2\sqrt{2}$$



# 手順②　関係式の導出

- $b_n^2$と $b_{n+1}^2$ との関係式を求める

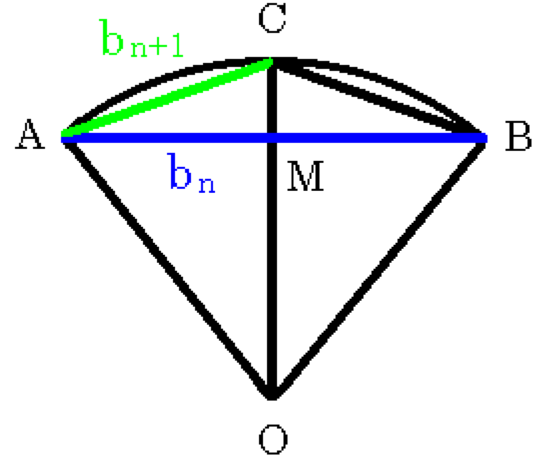
CM= $x$ とおく

△ACMより

$$b_{n+1}^2 - x^2 = \left(\frac{b_n}{2}\right)^2$$

△OAMより

$$\left(\frac{b_n}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - x\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$




この2式より

$$(x =)b_{n+1}^2 = \frac{1}{2} - \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{b_n}{2}\right)^2}$$

- 次に，$L_n^2$ と $L_{n+1}^2$との関係式を求める

$b_n^2$と $b_{n+1}^2$との関係式と，　$L_n = 2^n b_n$ より，

$b_{n+1}^2 = \dfrac{1}{2} - \sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{b_n}{2}\right)^2}$ の両辺に$2^{2(n+1)}$をかけて

，

$$L_{n+1}^2 = 2^{2n+1} - 2^{n+1}\sqrt{2^{2n} - L_n^2}$$

$$= 2^{n+1}\left(2^n - \sqrt{2^{2n} - L_n^2}\right)$$

# 手順③ $L_{n+1} = \sqrt{2^{n+1}\left(2^{n} - \sqrt{2^{2n} - L_n^2}\right)}$ を計算

これを実行すると

$L_{13} = \underline{\mathbf{3.141592}}\mathbf{576584872665681}$　　**7.7004920572781037291** $\times 10^{-8}$

$L_{14} = \underline{\mathbf{3.1415926}}\mathbf{34338562989095}$　　**1.925123024936716511** $\times 10^{-8}$

$L_{15} = \underline{\mathbf{3.1415926}}\mathbf{48776985669485}$　　**4.81280756897753541** $\times 10^{-9}$

$$L_{n+1} = \sqrt{2^{n+1}\left(2^n - \sqrt{2^{2n} - L_n^2}\right)}$$ を計算

これを実行すると左側の数値がでる（右側はπとの誤差）

$L_{15} =$ **<u>3.14159265</u>2386591345803525**　　**1.20320189265911786222** $\times 10^{-9}$

$L_{16} =$ **<u>3.141592653</u>288992765271943**　　**3.0080047319070034111** $\times 10^{-10}$

$L_{17} =$ **<u>3.1415926535</u>14593120163348**　　**7.520011829929514000** $\times 10^{-11}$

# ２．増約術による計算

$L_n$ を用いて新しい級数を作る

円周を $L$ とする

$$L - L_n = \left(L_{n+1} - L_n\right) + \left(L_{n+2} - L_{n+1}\right) + \left(L_{n+3} - L_{n+2}\right) + \cdots$$

$$= \left(L_{n+1} - L_n\right)\left(1 + \frac{L_{n+2} - L_{n+1}}{L_{n+1} - L_n} + \frac{L_{n+3} - L_{n+2}}{L_{n+1} - L_n} + \cdots\right)$$

$$= \left(L_{n+1} - L_n\right)\left(1 + \frac{L_{n+2} - L_{n+1}}{L_{n+1} - L_n} + \frac{L_{n+2} - L_{n+1}}{L_{n+1} - L_n}\frac{L_{n+3} - L_{n+2}}{L_{n+2} - L_{n+1}} + \cdots\right)$$

初項:　$L_{n+1}-L_n$

公比:　$\dfrac{L_{n+2}-L_{n+1}}{L_{n+1}-L_n}$　で考えると

$$\Leftrightarrow L \approx L_n + \frac{L_{n+1}-L_n}{1-\dfrac{L_{n+2}-L_{n+1}}{L_{n+1}-L_n}}$$

$$= L_{n+1} + \frac{\left(L_{n+1}-L_n\right)\left(L_{n+2}-L_{n+1}\right)}{\left(L_{n+1}-L_n\right)-\left(L_{n+2}-L_{n+1}\right)} \quad \cdots (*)$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} L_n & L_{n+1} \\ L_{n+1} & L_{n+2} \end{vmatrix}}{\Delta L_{n+1}-\Delta L_n} \quad (\Delta L_n = L_{n+1}-L_n)$$

関の増約術である(＊)の式を評価する

$$L \approx L_{n+1} + \frac{\left(L_{n+1} - L_n\right)\left(L_{n+2} - L_{n+1}\right)}{\left(L_{n+1} - L_n\right) - \left(L_{n+2} - L_{n+1}\right)}$$ を計算

これを実行すると左側の数値がでる(右側はπとの誤差)

| | | |
|---|---|---|
| n=12 | $\underline{3.14159265358979}38047128237436$ | $5.662501803603 \times 10^{-16}$ |
| n=13 | $\underline{3.141592653589793}2738532790168$ | $3.53906356335 \times 10^{-17}$ |
| n=14 | $\underline{3.141592653589793}2406745581004$ | $2.2119147171 \times 10^{-18}$ |
| n=15 | $\underline{3.14159265358979323}86008880529$ | $1.382446697 \times 10^{-19}$ |

# 最終的に求めたπの値

$\pi$ ＝3.14159265358979323846264338327950288841971

辺数順次等倍増加法では

$\pi \fallingdotseq 3.1415\ 9265\ 3288\ 9927\ 759$

増約術では

$\pi \fallingdotseq 3.1415\ 9265\ 3589\ 7932\ 3860$

3.141592653589を3.14159265359微弱と表した.

# ３．近似分数計算

円周率は，$\frac{3}{1} < 3.14\cdots < \frac{4}{1}$ である

$\frac{3+4}{1+1} = \frac{7}{2}$　を作ると　$\frac{3}{1} < 3.14\cdots < \frac{7}{2}$

次に　$\frac{3+7}{1+2} = \frac{10}{3}$　を作ると　$\frac{3}{1} < 3.14\cdots < \frac{10}{3}$

このようにして $\frac{a}{b}$ が得られたとき

$\frac{3}{1} < 3.14\cdots < \frac{a}{b}$　または　$\frac{a}{b} < 3.14\cdots < \frac{4}{1}$　から

$\frac{3+a}{1+b}$　または　$\frac{a+4}{b+1}$

を作り，より正確な近似分数を求め，最後に $\frac{355}{113}$ を得た

# 近似分数

$\frac{3}{1}$ = 3.0000000000000000000　　0.14159265358979323846

$\frac{13}{4}$ = 3.2500000000000000000　　0.10840734641020676154

：　：

$\frac{333}{106}$ = $\underline{3.1415}$094339622641509　　0.000083219627529087519

$\frac{355}{113}$ = $\underline{3.1415929}$203539823009　　0.000000266764189062422

# 3.14159265359微弱を定周となす

- なぜ関孝和はこのように言明できたのか．

『括要算法』における数値計算をよく観察しよう．

- 近似分数を求める過程で，3/1，4/1から始めて定周を上回る場合は分母分子にそれぞれ1，3を加え，下回る場合は分母分子に1，4を加えるということをしており上界，下界の意識が確実にあることに注意する．（また，村松茂清の『算俎』でも玉率について上界と下界をもとめて，真の値を推定した．そのことを関孝和も知っていた．）

# 推察

- 外接正 $2^n$ 角形の周の長さを計算して内接正角形の周の長さと比べるという方法では効率が悪く精度を上げるには適さないことを認識し，別の上界の求め方を考えた．
- 内接正 $2^n$ 角形の周の長さ から**辺数を倍にしていくとどれだけ増えるかを知ろうとした**．
- **そのために各段階の増分**，**すなわち**，**階差を計算**し，**階差の比が単調減少しながら0.25に近づいている**ことに気が付いた．

# 推察（続）

- 内接正 角形の周の長さの上界として公比が $(L_{17}-L_{16})/(L_{16}-L_{15})$ の等比級数を所謂増約術
- $$L_{16}+\frac{(L_{16}-L_{15})(L_{17}-L_{16})}{(L_{16}-L_{15})-(L_{17}-L_{16})}$$

で計算，下界として次を想定

$$L_n+\frac{4}{4-1}(L_{n+1}-L_n)$$

両者の一致する程度の小数の位を見定めた．

# 関の数値計算1

- 関孝和の$L_n$( $n$ =13,14,15,16,17)
- **3.14159257658487 26668**
- **3.14159263433856 29908**
- **3.14159264877698 56708**
- **3.14159265238659 13571**
- **3.14159265328899 27759**

# 関の数値計算２

- 関孝和の階差 $L_{n+1} - L_n$ ( $n$ =13,14,15,16)
- **0.0000000577536 903 240**
- **0.0000000144384 226 800**
- **0.0000000036096 056 863**
- **0.0000000009024 014 188**

**小数13位までは真に次々に1/4になっていることが見てすぐわかる！**

# 関の数値計算３

- 関孝和の階差の比 （ $n$ =14,15,16)

  $$(L_{n+1}-L_n)/(L_n-L_{n-1})$$

- **0.2500000017141 761 754**
- **0.2500000011289 321 805**
- **0.2499999992312 179 664**

**小数13位までの値を用いて比を計算すると**

**0.250000, 0.25000, 0.2500**

# 関の数値計算4

**参考として，計算機による加速公式の計算による上界と下界を紹介する**

- **n=13　3.14159265358979338047128**
  **n=13　3.14159265358979330968994**

$L_n$

- **n=14　3.14159265358979332738532**
  **n=14　3.14159265358979332296150**
- **n=15　3.14159265358979332406745**
  **n=15　3.14159265358979332379096**
- **n=16　3.14159265358979332386008(19桁一致)**
  **3.14159265358979332384280(20桁一致)**

# 関の数値計算５

- 関孝和の**計算から加速公式で計算した上界**

- **n=14　3.1415926535897932748**

$L_n$

- **n=15　3.1415926535897932597**
- **n=16　3.1415926535897932476**

# 関の数値計算６

- 関孝和の計算から公比1/4の無限等比級数として計算した下界

- n=14　3.1415926535897932748
- n=15　3.1415926535897932597
- n=16　3.1415926535897932476

# 関の数値計算6bis

- 関孝和の**計算から公比1/4の有限等比数列の和**

$$L_{17} + \frac{1}{4}\left(L_{17} - L_{16}\right) + \frac{1}{4^2}\left(L_{17} - L_{16}\right) + \ldots \frac{1}{4^{n-17}}\left(L_{17} - L_{16}\right) = L_{16} + \left(L_{17} - L_{16}\right)\left(1 + \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{4}\left(---\right)\right)\right)$$

**<u>3.14159265535</u>145931306** $L_n$

**<u>3.14159265535</u>70993219275**

**<u>3.141592653358</u>509324144375**

**…**

<u>と合ってくる.</u>

# 関の数値計算7

- 関孝和は数値計算により階差の比が単調減少して1/4 に近づいて行くと確信していたはずだが，彼の計算では，n=16に対しては0.25以下となり周長の長さの計算がn=15,16,17で違っていると考えたはずである．その違いは小数第17，18，19位くらいにあって，小数第13位までは階差の比が正確に1/4 になっており正しい計算になっていると考えたと推察する．

# 関の数値計算8

- 従って，その小数13位までの数値を使って，
- <u>3.1415926535897</u>

という値を知り，

- 小数第12位または第13位で繰上げして同じ結果となる数値<u>3.14159265359微弱を</u>定周と確定した．

# 補足0

- 『括要算法』の表を見ると，微弱，微強というときは，数値を小数第18位まで書き，弱，強のときは小数第19位まで書いている．これらの表記の仕方からすると，増約法で3.14159265359微弱と言っているときは，それより2桁多いところまでは知っていて書いていると考えられ，やはり小数第13位までの数値3.1415926535897を確信しているのではないか，と考えられる．

# 補足1. 階差の比の単調減少性の証明

$$\frac{L_{n+1}-L_n}{L_n-L_{n-1}}$$

$$=\frac{1}{(\sqrt{2}+\sqrt{1+\sqrt{1-h_{n-1}}})\sqrt{1+\sqrt{1-h_{n-1}}}}$$

# 補足２．等比級数の和公式

# （等比数列の階差数列からなる級数を考えると自然に得られる）

$$a-ar^{n}=(a-ar)+(ar-ar^{2})+\ldots+(ar^{n-1}-ar^{n})$$

$$=a(1-r)+ar(1-r)++ar^{n-1}(1-r)$$

$$a+ar+ar^{2}+\ldots+ar^{n-1}=a\frac{1-r^{n}}{1-r}$$

# 補足3 『括要算法』について

- 『括要算法』は荒木が宝永6年冬の跋文で書いているように，関孝和門弟荒木村英がその門人大高由昌に関孝和先生の遺稿を整理・編集させ正徳2年正月上旬（1712年　）に大高由昌自序の著書として刊行した．書肆は川勝，村上，杉本，升屋．
- その後，書肆天王寺屋市郎兵衛が板木を手に入れ，荒木村英検閲，大高由昌校訂，大高由昌の序，と修正され水玉堂から出版された．

# 補足4. 建部賢弘の関氏の計算への言及

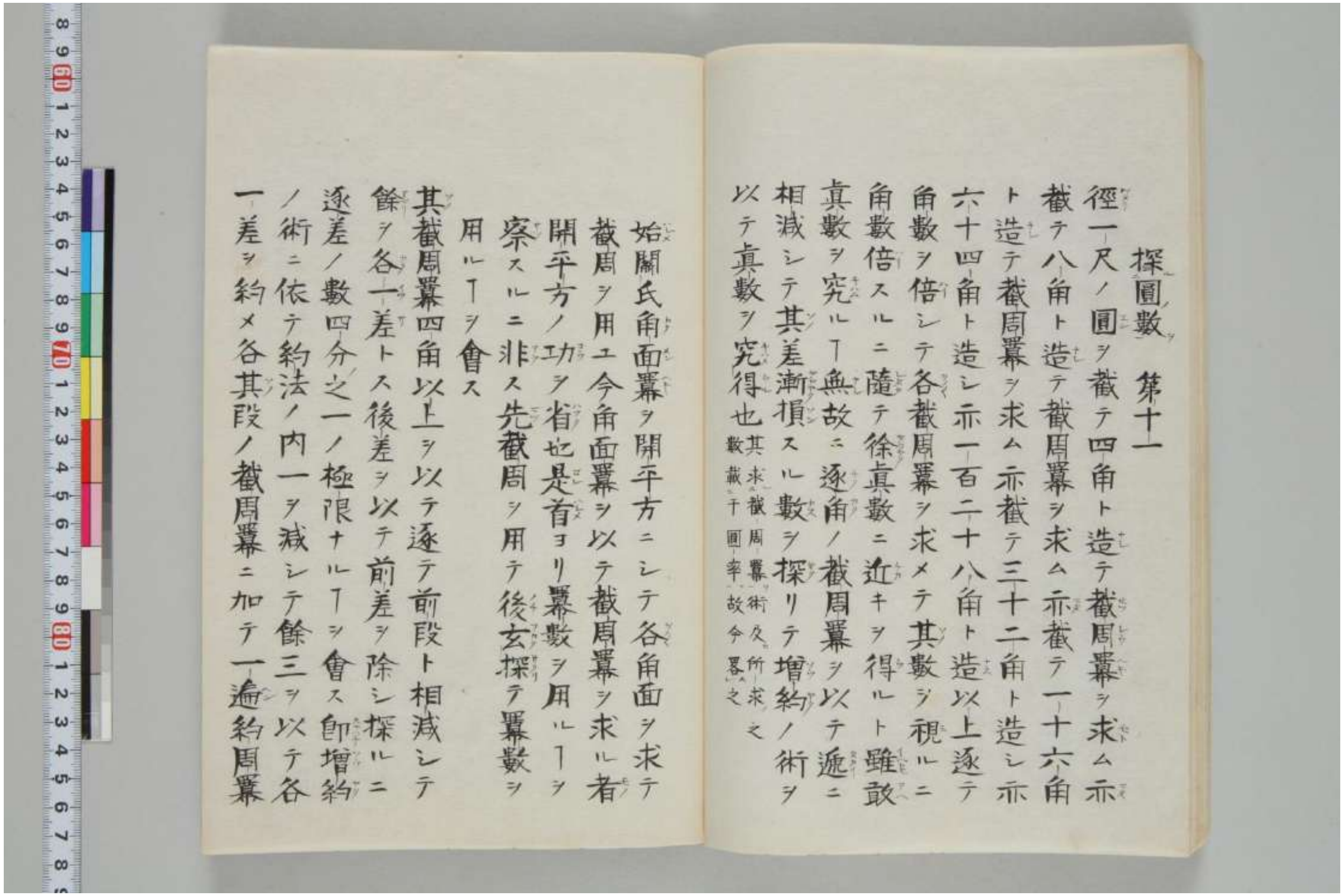
- 『綴術算経』では，「始関氏増約の術を以て定周を求る事を理會して一遍にして止む故に十三万千七十二角に到る截周を求て十五六位の真数を究め得たり」
- 『建部先生綴術真本』（東大本）では「二十許位の真数を究め」とある.
- 『綴術算経（東北大学　狩野本）』でも「二十許位の真数を究め」とある.

# 補足4．建部賢弘の関氏の計算への言及（続）

- 『綴術算経』，『建部先生綴術真本』（東大本），『綴術算経（東北大学　狩野本）』の成立順についての議論があるが，関氏の計算への言及から見て，やはり，『綴術算経』が最初で，1か月の間に，関の計算法で計算をし直して，実は「20許位」も真の値を計算できていることを確認し，その結果により，『建部先生綴術真本』（東大本），『綴術算経（東北大学　狩野本）』に書き込んだ，と考えられる．

# 綴術算経（表紙）

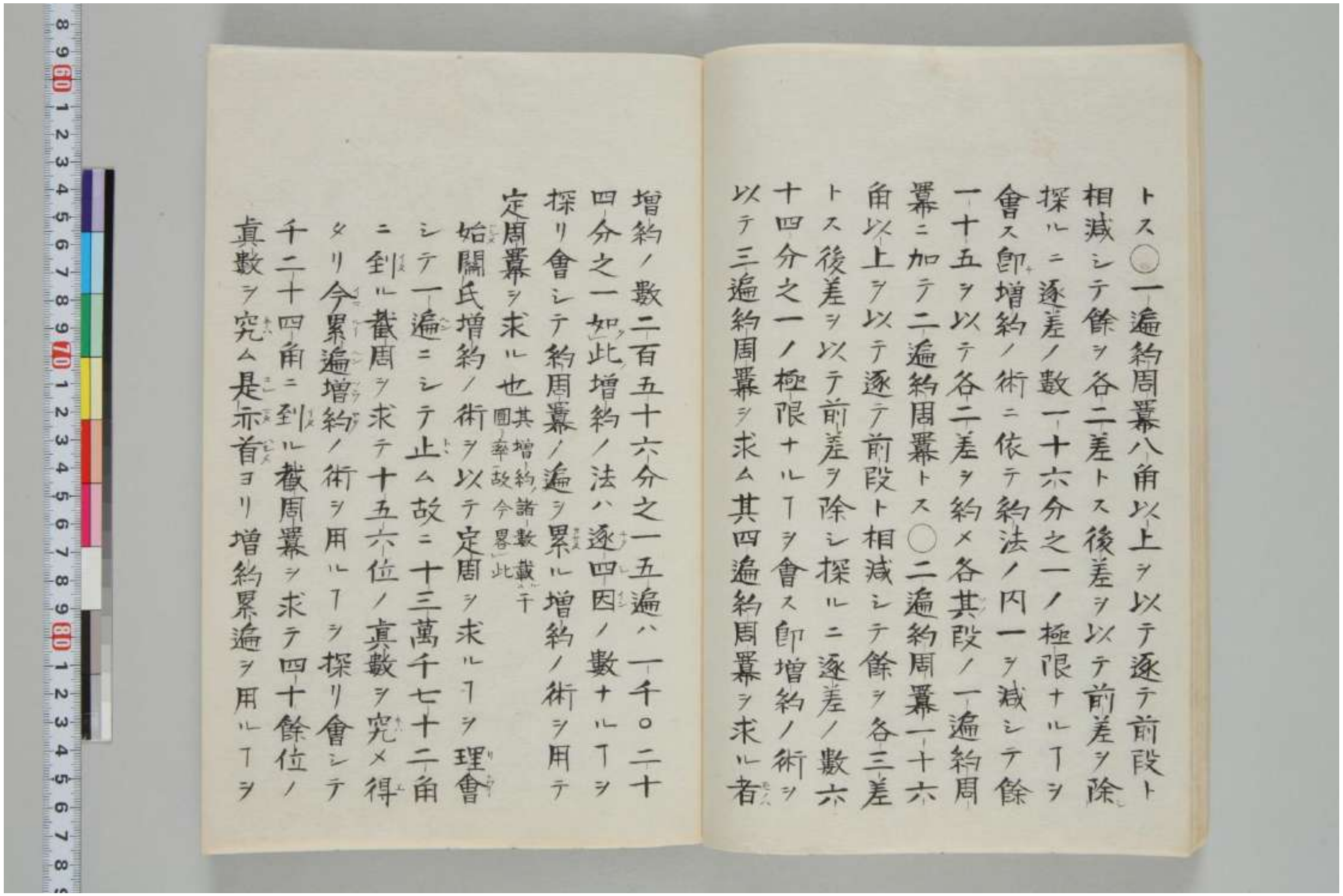
# 綴術算経(37)



探圓數　第十一
徑一尺ノ圓ヲ截テ四角ト造テ截周羃ヲ求ム亦
截テ八角ト造テ截周羃ヲ求ム亦截テ一十六角
ト造テ截周羃ヲ求ム亦截テ三十二角ト造シ亦
六十四角ト造シ亦一百二十八角ト造以上逐テ
角數ヲ倍シテ各截周羃ヲ求メテ其數ヲ視ルニ
角數倍スルニ隨テ徐真數ニ近キヲ得ルト雖𪜈
真數ヲ究ルヿ無故ニ逐角ノ截周羃ヲ以テ遞ニ
相減シテ其差漸損スル數ヲ探リテ増約ノ術ヲ
以テ真數ヲ究得也 其求截周羃術及所求之數截于圓率故今畧之

始闗氏角面羃ヲ開平方ニシテ各角面ヲ求テ
截周ヲ用ユ今角面羃ヲ以テ截周羃ヲ求ル者
開平方ノ功ヲ省也是首ヨリ羃數ヲ用ルヿヲ
察スルニ非ス先截周ヲ用テ後玄探テ羃數ヲ
用ルヿヲ會ス
其截周羃四角以上ヲ以テ逐テ前段ト相減シテ
餘ヲ各一差トス後差ヲ以テ前差ヲ除シ探ルニ
逐差ノ數四分之一ノ極限ナルヿヲ會ス卽増約
ノ術ニ依テ約法ノ内一ヲ減シテ餘三ヲ以テ各
一差ヲ約メ各其段ノ截周羃ニ加テ一遍約周羃

# 綴術算経（38）

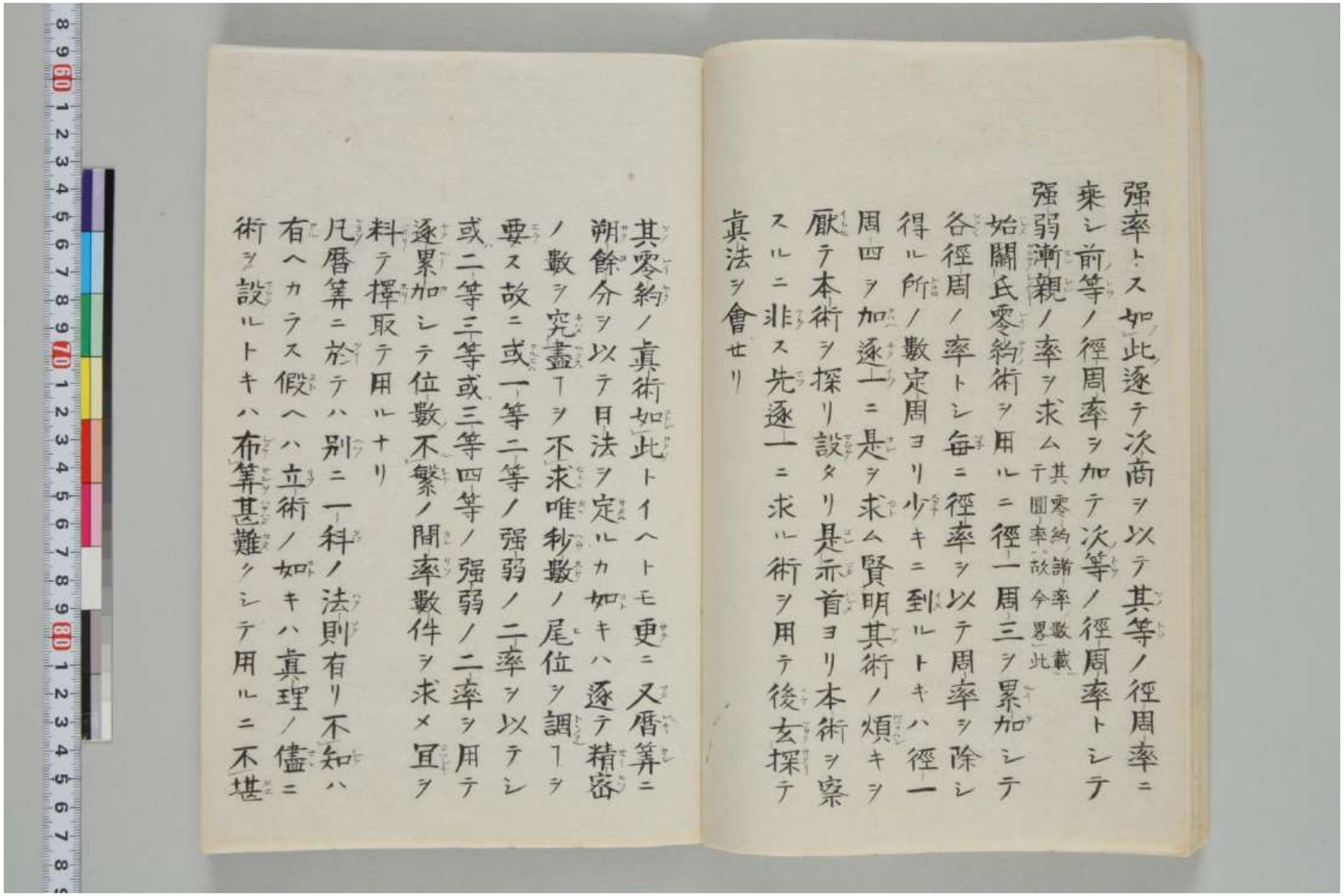

トス○一遍約周冪八角以上ヲ以テ逐テ前段ト
相減シテ餘ヲ各二差トス後差ヲ以テ前差ヲ除
探ルニ逐差ノ數一十六分之一ノ極限ナルヿヲ
會ス卽增約ノ術ニ依テ約法ノ内一ヲ減シテ餘
一十五ヲ以テ各二差ヲ約メ各其段ノ一遍約周
冪ニ加テ二遍約周冪トス○二遍約周冪一十六
角以上ヲ以テ逐テ前段ト相減シテ餘ヲ各三差
トス後差ヲ以テ前差ヲ除シ探ルニ逐差ノ數六
十四分之一ノ極限ナルヿヲ會ス卽增約ノ術ヲ
以テ三遍約周冪ヲ求ム其四遍約周冪ヲ求ル者

增約ノ數二百五十六分之一五遍ハ一千○二十
四分之一如此增約ノ法ハ逐四因ノ數ナルヿヲ
探リ會シテ約周冪ノ遍ヲ累ル增約ノ術ヲ用テ
定周冪ヲ求ル也其增約諸數載于圖率故今畧此
始關氏增約ノ術ヲ以テ定周ヲ求ルヿヲ理會
シテ一遍ニシテ止ム故ニ十三萬千七十二角
ニ到ル截周ヲ求テ十五六位ノ眞數ヲ究メ得
タリ今累遍增約ノ術ヲ用ルヿヲ探リ會シテ
千二十四角ニ到ル截周冪ヲ求テ四十餘位ノ
眞數ヲ究ム是示首ヨリ增約累遍ヲ用ルヿヲ

# 綴術算経（39）

察スヘカラス一遍ノ増約ヲ用テ後玄ク探テ
累遍スルヿシ會セリ
砕約ノ術ヲ用テ徑一尺ノ定周三尺一寸四一五
九二六五三五八九七九三二三八四六二六四三
三八三二七九五〇二八八四一九七一二強ヲ求
得テ零約ノ術ヲ以テ徑周ノ率ヲ造ル
元數一ヲ置卽尺ノ位ト定ム以テ定周ヲ除テ餘ニ
少ヲ以テ多ヲ除也得商ト不盡ヲ第一トス第一ノ不盡ヲ
以テ元數一ヲ除テ得商ト不盡ヲ第二トス第二
ノ不盡ヲ以テ第一ノ不盡ヲ除テ得商ト不盡ヲ
第三トス第三ノ不盡ヲ以テ第二ノ不盡ヲ除テ
得商ト不盡ヲ第四トス第四ノ不盡ヲ以テ第三
ノ不盡ヲ除テ得商ト不盡ヲ第五トス如此其段
ノ不盡ヲ以テ前段ノ不盡ヲ除テ逐商ヲ求ム〇
元數ノ一ヲ徑率トシ第一ノ商ヲ周率トス是ヲ
一等ノ弱率トス第二ノ商ヲ以テ一等ノ徑周率
ニ乘シ周率ニ元數ノ一ヲ加テ二等ノ強率トス
第三ノ商ヲ以テ二等ノ徑周率ニ乘シ一等ノ徑
周率ヲ加テ三等ノ弱率トス第四ノ商ヲ以テ三
等ノ徑周率ニ乘シ二等ノ徑周率ヲ加テ四等ノ

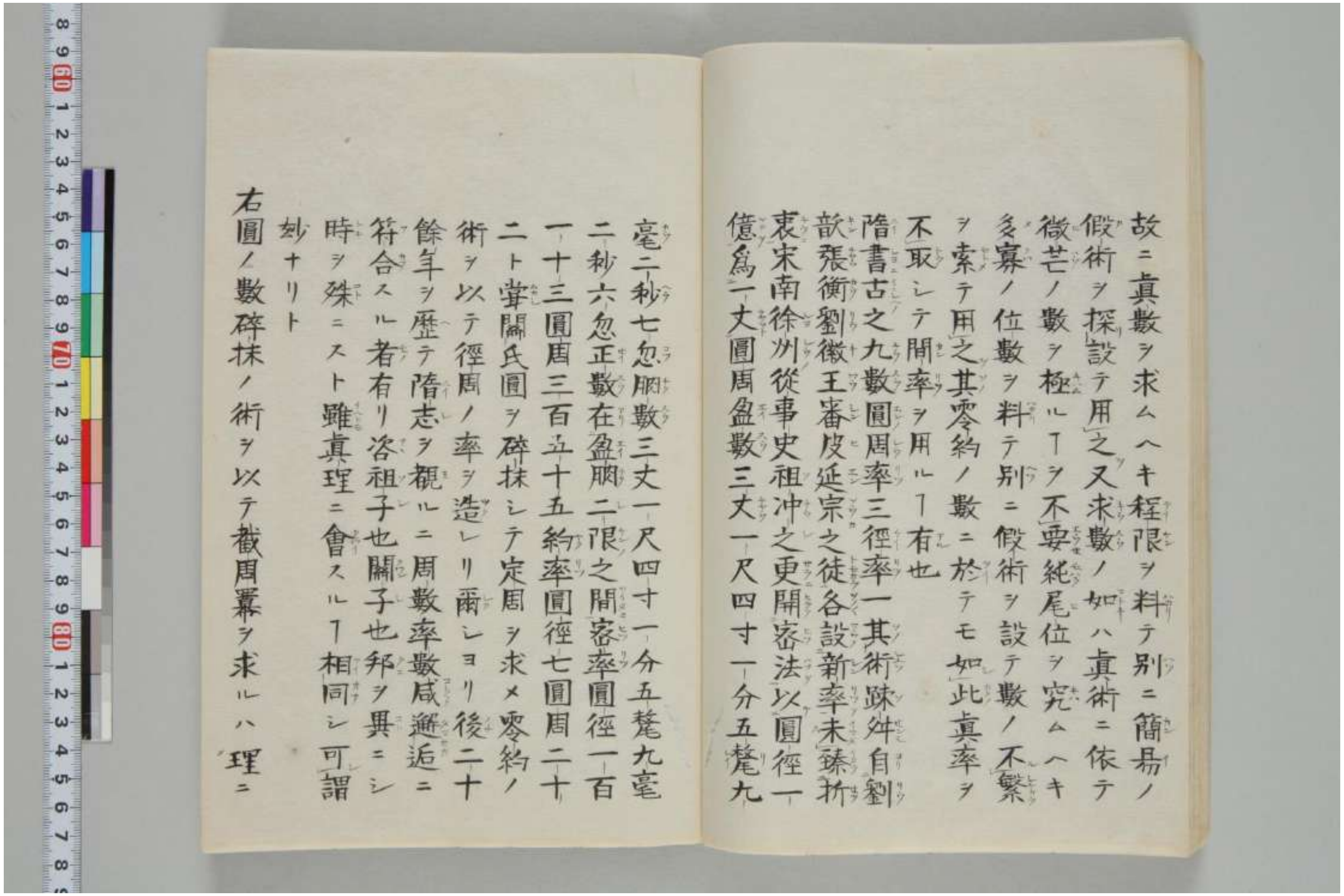
# 綴術算経（40）



強率トス如此逐テ次商ヲ以テ其等ノ徑周率ニ
乗シ前等ノ徑周率ヲ加テ次等ノ徑周率トシテ
強弱漸親ノ率ヲ求ム（其零約諸率數載于圓率故今畧此）
始關氏零約術ヲ用ルニ徑一周三ヲ累加シテ
各徑周ノ率トシ毎ニ徑率ヲ以テ周率ヲ除シ
得ル所ノ數定周ヨリ少キニ到ルトキハ徑一
周四ヲ加逐一ニ是ヲ求ム賢明其術ノ煩キヲ
厭テ本術ヲ探リ設タリ是示首ヨリ本術ヲ察
スルニ非ス先逐一ニ求ル術ヲ用テ後玄探テ
真法ヲ會セリ

其零約ノ真術如此トイヘトモ更ニ又暦算ニ
朔餘分ヲ以テ日法ヲ定ルカ如キハ逐テ精密
ノ數ヲ究盡ヿヲ不求唯秒數ノ尾位ヲ調ヿヲ
要ス故ニ或一等二等ノ強弱ノ二率ヲ以テシ
或二等三等或三等四等ノ強弱ノ二率ヲ用テ
逐累加シテ位數不繁ノ間率數件ヲ求メ宜ヲ
料テ擇取テ用ルナリ
凡暦算ニ於テハ別ニ一科ノ法則有リ不知ハ
有ヘカラス假ヘハ立術ノ如キハ真理ノ儘ニ
術ヲ設ルトキハ布算甚難クシテ用ルニ不堪

# 綴術算経（41）

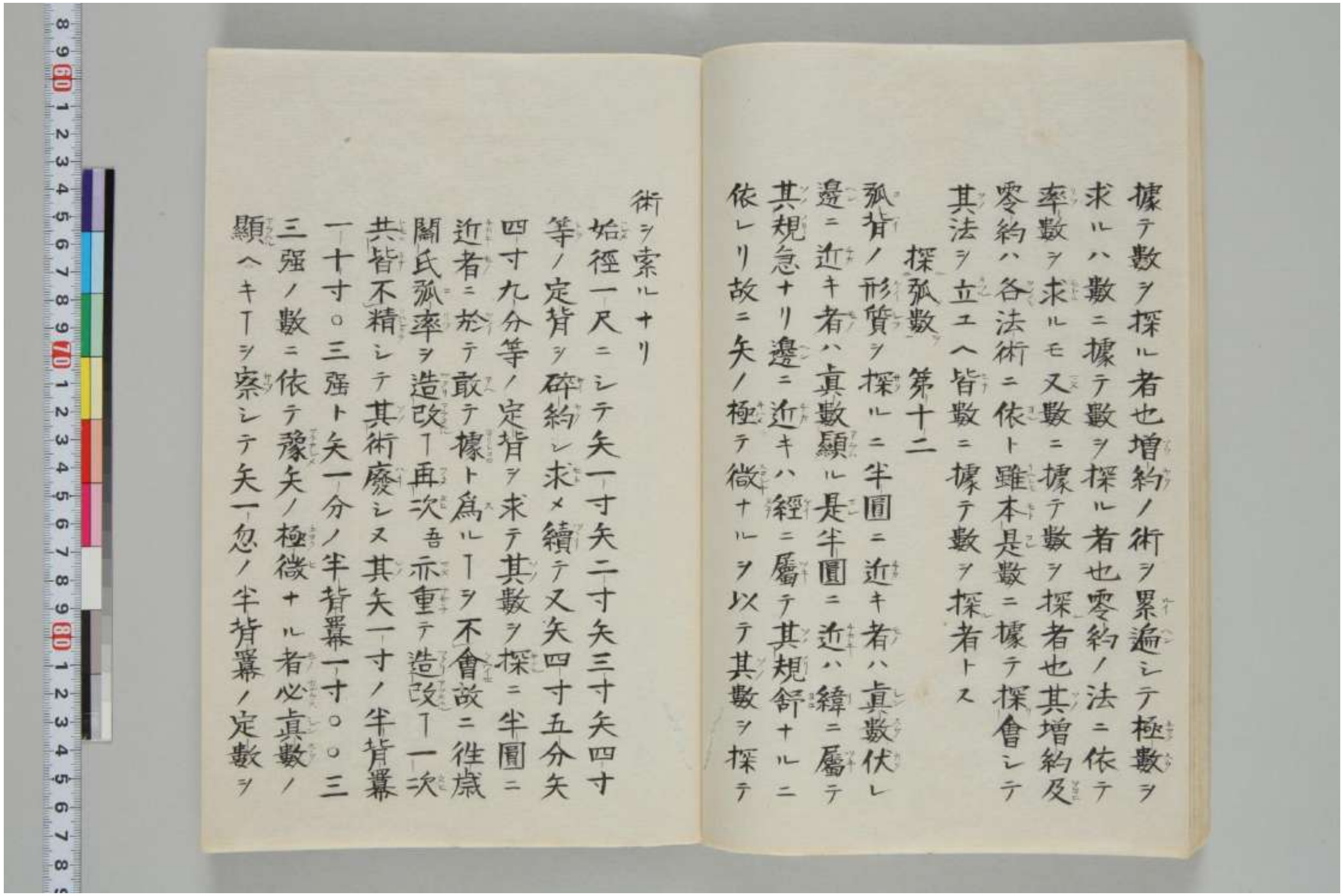


故ニ真數ヲ求ムヘキ程限ヲ料テ別ニ簡易ノ假術ヲ採設テ用之又求數ノ如ハ真術ニ依テ微芒ノ數ヲ極ルヿヲ不要純尾位ヲ究ムヘキ多寡ノ位數ヲ料テ別ニ假術ヲ設テ數ノ不繁ヲ索テ用之其零約ノ數ニ於テモ如此真率ヲ不取シテ間率ヲ用ルヿ有也

隋書古之九數圓周率三徑率一其術踈舛自劉歆張衡劉徽王蕃皮延宗之徒各設新率未臻折衷宋南徐州從事史祖沖之更開密法以圓徑一億為一丈圓周盈數三丈一尺四寸一分五釐九毫二秒七忽朒數三丈一尺四寸一分五釐九毫二秒六忽正數在盈朒二限之間密率圓徑一百一十三圓周三百五十五約率圓徑七圓周二十二ト崇關氏圓ヲ碎抹シテ定周ヲ求メ零約ノ術ヲ以テ徑周ノ率ヲ造レリ爾シヨリ後二十餘年ヲ歷テ隋志ヲ覩ルニ周數率數咸邂逅ニ符合スル者有リ洛祖子也關子也邦ヲ異ニシ時ヲ殊ニスト雖真理ニ會スルヿ相同シ可謂妙ナリト

右圓ノ數碎抹ノ術ヲ以テ截周冪ヲ求ルハ理ニ

# 綴術算経（42）



據テ數ヲ探ル者也増約ノ術ヲ累遍シテ極數ヲ求ルハ數ニ據テ數ヲ探ル者也零約ノ法ニ依テ率數ヲ求ルモ又數ニ據テ數ヲ探者也其増約及零約ハ各法術ニ依ト雖本是數ニ據テ探會シテ其法ヲ立エヘ皆數ニ據テ數ヲ探者トス

探弧數　第十二

弧背ノ形質ヲ探ルニ半圓ニ近キ者ハ眞數伏シ邊ニ近キ者ハ眞數顯ル是半圓ニ近ハ緯ニ屬テ其規急ナリ邊ニ近キハ經ニ屬テ其規舒ナルニ依レリ故ニ矢ノ極テ微ナルヲ以テ其數ヲ探テ

術ヲ索ルナリ

始徑一尺ニシテ矢一寸矢二寸矢三寸矢四寸等ノ定背ヲ碎約シ求メ續テ又矢四寸五分矢四寸九分等ノ定背ヲ求テ其數ヲ探ニ半圓ニ近者ニ於テ敢テ據ト爲ルヿヲ不會故ニ往歳關氏弧率ヲ造改ヿ再次吾亦重テ造改ヿ一次共皆不精シテ其術廢シヌ其矢一寸ノ半背冪一十寸〇三強ト矢一分ノ半背冪一寸〇〇三三強ノ數ニ依テ豫矢ノ極微ナル者必眞數ノ顯ヘキヿヲ察シテ矢一忽ノ半背冪ノ定數ヲ

# 建部賢弘の「綴術算経」と「不休綴術」の成立時期について1

- 建部賢弘が師関孝和の円周率の計算について（将軍吉宗に献上されたとされる）「綴術算経」（国立公文書館蔵，序文享保七年壬寅孟春）では「十三万千七十二角に到る截周を求て十五六位の真数を究め得たり」と書き，「建部先生綴術真本」（東大本）及び「綴術算経（東北大学　狩野本）」では（序文，享保七年壬寅徐月）では「二十許位の真数を究め」と書いた点に初めて注目し，これらの書物の成立順に関する議論に一つの決定的な論拠を与えたと考えた．

# 建部賢弘の「綴術算経」と「不休綴術」の成立時期について2

- 孟春は旧暦の1月，徐月は12月のことで，1年近くが再計算と再編集に費やされたと，素直に読めば考えることができる．しかしながら，多くの先行研究もあり，原稿の成立についてはより複雑な過程があったとも考えられている．そもそも，これらの本には付録があり，その日付は（享保十年）乙巳夏至十三日となっていて，付録も含めて全体が完成したのは序文の日付から3年ほど後になるようである．この3年の間には国絵図の作成の仕事にかかわっていた

# 建部賢弘の「綴術算経」と「不休綴術」の成立時期について3

- 建部賢弘のこれらの書物の編集・流布過程は，関流数学の教育・業績の流布の仕方，当時の数学界の有り様がどうであったかにも関わり，**「建部賢明・賢弘兄弟年2011～2014」（建部賢明の生誕350年から賢弘の生誕350年迄）**の調査目標としたが果たせなかった.
- 尚，二つの序文が書かれた期間中の享保七年正月十三日に**「弧背截約集」の中巻に書かれるアイデアが浮かんでいる. 円周率の計算表は上巻に掲載されている.**

# 関孝和先生誕生年の新説

- 祝い年に出版があったと考えると寛永20年（1643年2月19日から1644年12月2月7日）になると推測されることに気付いたこ．荒木村英と大高由昌が関わった『括要算法』（宝永 6年冬の序文，跋文）は正徳2年正月に刊行であり，建部賢弘著「綴術算経」の序文は享保7年正月7日（1722年2月22日）で，関孝和先生誕生年を知っていたであろう直弟子が関先生が生きておられたらそれぞれ古希，傘寿の祝い年のことと考えれば，関先生の生まれ年は寛永20年になる.

# 〇数学史関係論文・著書・論説

- 前略（４）真島秀行，関孝和の円周率の計算についての注意，京都大学数理解析研究所講究録 1625，2009 年 4 月，pp192-199
- （５）真島秀行，関孝和三百年祭に明らかになったこと，数学史研究 第 200 号，2009 年 3 月，pp5-15
- （６）真島秀行，「甲府日記」と「甲府御館紀」に見える関新助孝和，京都大学数理解析研 究所講究録 1677，2010 年 5 月，pp47-58
- （７）真島秀行，関新助孝和の履歴について—ある甲府分限帳の記載について，数学史研究 第 204 号，2010 年 3 月，pp42-51
- 中略（１０）真島秀行：『解伏題之法』の行列式と『大成算経』の行列式について，京都大学数 理解析研究所講究録 1831(『大成算経』の数学的・歴史的研究), 2013, pp31- 52
- （１１）Majima, Hideyuki, Seki Takakazu, his life and bibliography, in “Seki, Founder of Modern Mathematics in Japan” A Commemoration on His Tercentenary, Ser. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, Vol. 39, Knonloch E., Komatsu H., Liu D.(Eds), 2013, pp3-20
- （１２）真島秀行，「算学玄訓」における関孝和の行列式, 京都大学数理解析研究所講究録 別冊，B50, (数学史の研究), 2014, pp35-40
- （１３）真島秀行，日本の数学関係の周年事業について, 京都大学数理解析研究所講究録 別冊，B85, (数学史の研究), 2021, pp183-186
- （１４）真島秀行，2022 年，関孝和 314 年祭に向けてⅡ, 京都大学数理解析研究所講究録 別冊，B89, (数学史の研究), 2022, pp183-186
- （１５）真島秀行，関新助孝和の履歴について補遺—関孝和 314 年忌に寄せて—（研究発表 要旨），数学史研究 第 241 号，2021 年 12 月～2022 年 3 月，pp74-78

# ○数学教育関係論文・研究報告
# ○展示会図録，DVD

1）真島秀行，油分け算の不等式による解法，平成 17 年度日本数学教育学会高等学校部 会研究報告書:「数学的な活動」を促す教材開発と指導法の工夫—数学 II・数学 B 編—，日本数学教育学会，2006 年 3 月，pp18-21（他略）

（1）真島秀行（和算の贈り物実行委員会編集としているが和算の贈り物実行委員長として 本文執筆），「和算の贈り物」展示図録，東京，文京区教育委員会，2004 年 12 月，36 頁

（2）真島秀行執筆・監修「数学 日本のパイオニア」，2008 年 11 月，18 ページ

（3）真島秀行監修，菊池大麓 洋算教育を普及させた数学者 : 関孝和三百年祭記念，日本 数学会 2009

（4）真島秀行監修，高木貞治 世界的な業績を残した近代日本の数学者 : 関孝和三百年 祭記念，日本数学会 2009　後略