

楽しい整数 (60 進法)

竹内淳実 2024 年 2 月 19 日記

整数には、ときめく数、つまらない数、があるという。私にとって、ときめく数は、60 進法である。60 進法は古代バビロニアで用いられており、時刻の分秒、経緯度などに用いられる。東洋では干支、古代から今尚生き続ける算法といえよう。人生六十年のけじめ、各人 生まれ年の干支を数え 還暦を大切にする。

60 進法での、1, 5, 13, 17, 25, 29, 37, 41, 49, 53 の数字列。

1+4=5, 5+8=13, 13+4=17, 17+8=25, 25+4=29, 29+8=37, 37+4=41, 41+8=49, 49+4=53 と書け、53+8=61 と次の 60 に進む。〔(mod60) とすると、次のサイクルになる〕

全奇数の三分の一 となるが、〔60 までに奇数は全部で 30 個あるが、ここに選んだ 1, ..., 53 の 10 個の奇数は〕 特異な性質を持つ。

少し並べてみよう：

1	—	61	$11^2 + 60^2 = 61^2$	121	(11^2)
5	$3^2 + 4^2 = 5^2$	65	$63^2 + 16^2 = 33^2 + 56^2 = 65^2$	125	$117^2 + 44^2 = 125^2$
13	$5^2 + 12^2 = 13^2$	73	$55^2 + 48^2 = 73^2$	133	(7×19)
17	$15^2 + 8^2 = 17^2$	77	(7×11)	137	$105^2 + 88^2 = 137^2$
25	$7^2 + 24^2 = 25^2$	85	$13^2 + 84^2 = 77^2 + 36^2 = 85^2$	145	$17^2 + 144^2 = 143^2 + 24^2 = 145^2$
29	$21^2 + 20^2 = 29^2$	89	$39^2 + 80^2 = 89^2$	149	$51^2 + 140^2 = 149^2$
37	$35^2 + 12^2 = 37^2$	97	$65^2 + 72^2 = 97^2$	157	$85^2 + 132^2 = 157^2$
41	$9^2 + 40^2 = 41^2$	101	$99^2 + 20^2 = 101^2$	161	(7×23)
49	(7^2)	109	$91^2 + 60^2 = 109^2$	169	$119^2 + 120^2 = 169^2 = 13^4$
53	$45^2 + 28^2 = 53^2$	113	$15^2 + 112^2 = 113^2$	173	$165^2 + 52^2 = 173^2$

そう、A, B 互いに素である ピタゴラス数 $A^2 + B^2 = C^2$ の C 値グループである。ここに紛れ込む、ピタゴラス C 値でないものは 49, 77 のように除外される。

30001~30060 を見てみよう。

30001	19 x 1579	除外
30005	$169^2 + 38^2 = 167^2 + 46^2 = 158^2 + 71^2 = 137^2 + 106^2 = 5 \cdot 17 \cdot 353$	$(353 = 60 \times 5 + 53)$ (27117, 12844, 30005) (25773, 15364, 30005) (19923, 22436, 30005) (7533, 29044, 30005)
30013	$123^2 + 122^2$	(245, 30012, 30013)
30017	$161^2 + 64^2 = 124^2 + 121^2 = 13 \cdot 2309$	$(2309 = 60 \times 38 + 29)$ (21825, 20608, 30017) (735, 30008, 30017)
30025	$172^2 + 21^2 = 171^2 + 28^2 = 5^2 \cdot 1201$	$(1201 = 60 \times 20 + 1)$ (29143, 7224, 30025) (28457, 9576, 30025)
30029	$173^2 + 10^2$	(29829, 3460, 30029)
30037	$126^2 + 119^2$	(1715, 29988, 30037)
30041	11 x 2731	除外
30049	151 x 199, 151 = 60 x 2 + 31, 199 = 60 x 3 + 19	除外
30053	$143^2 + 98^2 = 127^2 + 118^2 = 41 \cdot 733$	$(733 = 60 \times 12 + 13)$ (10845, 28028, 30053) (2205, 29972, 30053)

もうひとつ面白いことがある。

$$13 \times 5 = 60 + 5, 17 \times 5 = 60 + 25, 25 \times 5 = (60 \times 2) + 5, 29 \times 5 = (60 \times 2) + 25,$$

$$37 \times 5 = (60 \times 3) + 5, 41 \times 5 = (60 \times 3) + 25, 53 \times 5 = (60 \times 4) + 25$$

$$13^2 = (60 \times 2) + 49, 171 \times 3 = (60 \times 3) + 41, 25 \times 13 = (60 \times 5) + 25, 29 \times 13 = (60 \times 6) + 17,$$

$$37 \times 13 = (60 \times 8) + 1, 41 \times 13 = (60 \times 8) + 53, 53 \times 13 = (60 \times 11) + 29$$

$$17^2 = (60 \times 4) + 49, 25 \times 17 = (60 \times 7) + 5, 29 \times 17 = (60 \times 8) + 13, 37 \times 17 = (60 \times 10) +$$

29 . . .

と続き、 $53^2 = (60 \times 46) + 49$ と全てこの数字列に収まる。

遊ぶ時間たっぷりの 数字列！

参考：

整数の不思議な世界 ときめく数 つまらない数

“Most boring Number” ” All Natural Numbers Are Happy or Sad” Manon Bischoff

日経サイエンス 2024・02