

原始ピタゴラス数

三分木の構造が発見された
それによって $\sqrt{2}$ の超精密近似が可能になった。

その方法

愛知県立大学数学教育担当 亀井喜久男

原始ピタゴラス数とは

原始ピタゴラス数 primitive Pythagorean triplesとはピタゴラス数のうち3つの数が互いに素であるものをいう。つまり、自然数の3つ組 (a, b, c) であって $a^2 + b^2 = c^2$ (ピタゴラス数の条件)

$\gcd(a, b, c) = 1$ (原始性の条件) をともに満たすもののことである。ユークリッドの式またはピタゴラスの公式とは、

$(a, b, c) = (m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$ 又は $(2mn, m^2 - n^2, m^2 + n^2)$

の形のことである。ここで、 m, n は自然数で m, n は互いに素。

$m > n$ 。 m と n の偶奇は異なる (一方が奇数で他方が偶数)。

を満たす。

原始ピタゴラスの実例

(3, 4, 5)

(5, 12, 13)、(15, 8, 17)

(21, 20, 29)

ピタゴラスの系列

(3, 4, 5)

(5, 12, 13)

(7, 24, 25)

奇数 a

自乗ー引き2で割って b

それに1足し c とせよ。

a, b, c これ原始ピタなり。

プラトンの系列

偶数一つ用意する

自乗1引きbとする

それに2を足しcとする

はじめの偶数2倍しa

abcこれ原始ピタなり

フェルマーの系列

(3, 4, 5)

(20, 21, 29)

(119, 120, 169)

(696, 697, 985)

直角を

挟む2辺の差が1で

斜辺がなんと整数だ

これフェルマーの原始ピタナリ。

原始ピタゴラス三角形の系統性

- ピタゴラス原始三角形に3分木をなすという系統性が有ります。30年以上前1991年から原始ピタゴラス三角形のうちフェルマー系列(直角を挟む2辺の差が1である。原始ピタゴラス三角形)に関心を持ち漸化式を名古屋で開催の全国私学の数学部会で発表して愛知県の数学の先生方とも一緒に研究を始めました。ついに3つの行列によってすべてを網羅できるところまで発見してはだ野先生に報告アメリカに先行あったと聞いて愕然しかし楽しい研究でした。最近再燃していて喜んでいきます。私はなぜ行列の成分が1, 2, 3だけなのか考え続けてきました。

フェルマー系列 直角挟む2辺の差保存

- 数学愛好家島田正雄さんの説明の仕方に心惹かれました。 mn の2数で原始ピタゴラス三角形を作ることができます。そこにも3分木あります。 2×2 の行列もあります。しかし納得いくまでではなかったのです。島田正雄解説を解説します。縦 m 横 n の長方形を考えます。スタートは $m=2$, $n=1$ とします。この長方形に3通りの変換を施します。長辺、短辺という概念に注目ください。長辺は2、短辺は1です。長辺に長辺正方形を2つ張り付けます。すると縦2横5の長方形ができます。縦が長辺になるように転置します。すると縦5横2の長方形になります。まずはこれが1つ目の変換です。フェルマー系列に対応しています。この時の原始ピタゴラス三角形は21, 20, 29です。

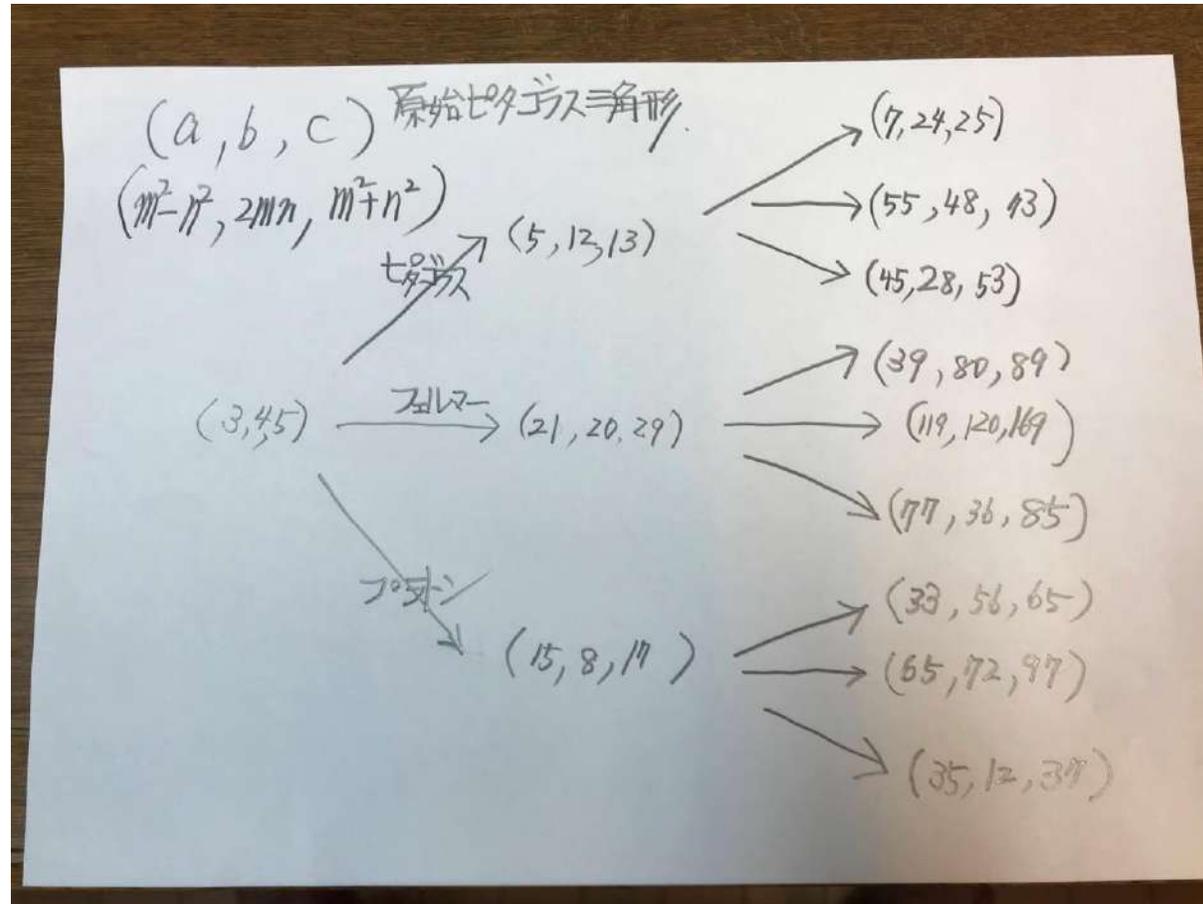
プラトンの系列 斜辺と奇数辺の差保存

- 次に元の縦2横1の長方形に短辺正方形2枚張り付けることをします。すると縦4横1の長方形になります。これがプラトン系列に対応しています。原始ピタゴラス三角形は15, 8, 17です。どちらも原始ピタゴラス三角形のもとになる mn の2数です。この変換はどちらも偶奇が異なることを保存します。また互いに素(最大公約数が1)を保存します。この変換手続きがそれを保証しているのです。島田解説により納得が行了きました。救われた瞬間でした。ピタゴラス系列に対応する mn の長方形は不思議な作成法です。先に長辺正方形2個並べておきます。そこからもとになる長方形を引き去るのです。縦長になる手続きはします。そのようにしても新しい mn 長方形が作成できます。これがピタゴラス系列の3分木。

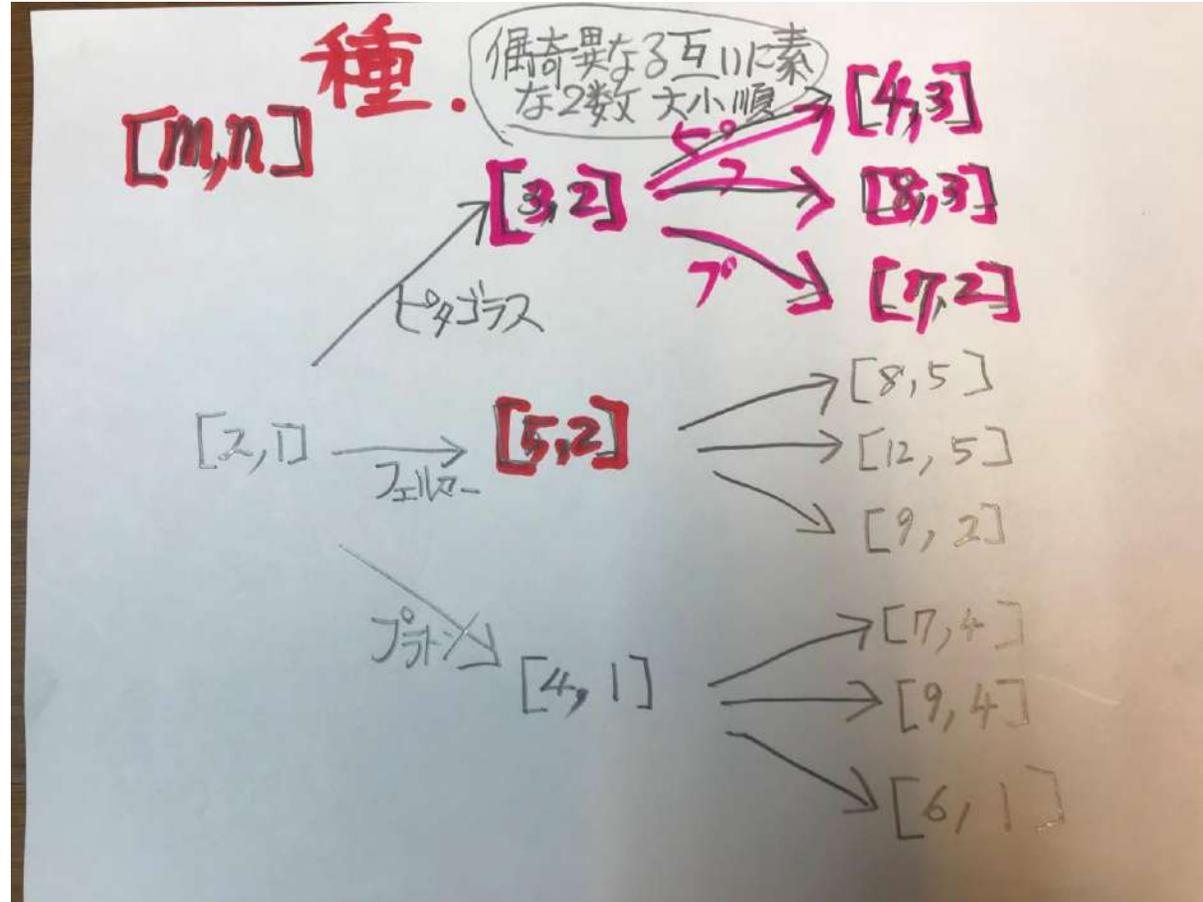
ピタゴラスの系列 斜辺と偶数辺の差保存

- この方式でできる m 、 n は $m=2$ 、 $n=1$ で始めると $M=3$ 、 $N=2$ となります。ここは練習してください。この数の時の原始ピタゴラス三角形は5, 12, 13です。この時の3通りの変換が起こり得るすべての近接の長方形作成だったのです。これで氷解しました。数式的には分かっていた。しかし図形解釈ができなかったのです。自分は図形解釈大好きです。島田さん解説を広めたいと考えて東大数理科学研究科002教室での数学月間の会の懇話会のテーマに推薦しましたら了解いただけただけの木に対応していきます。次第です。皆さんにお話しできるのが楽しみです。わくわくします。なお $m=2$ の時 m の二乗を長さで表現することができます。相似拡大を利用するのですがなれないとここで挫折します。私の挿絵で乗り越えてくださるとすべて見渡せます。時間を惜しまないで悩んでください。正方形の面積だけで自乗を考えていては3乗は体積、4乗は4次元で意味不明となって挫折します。相似拡大で累乗を理解できるようになった方が良く考えています。

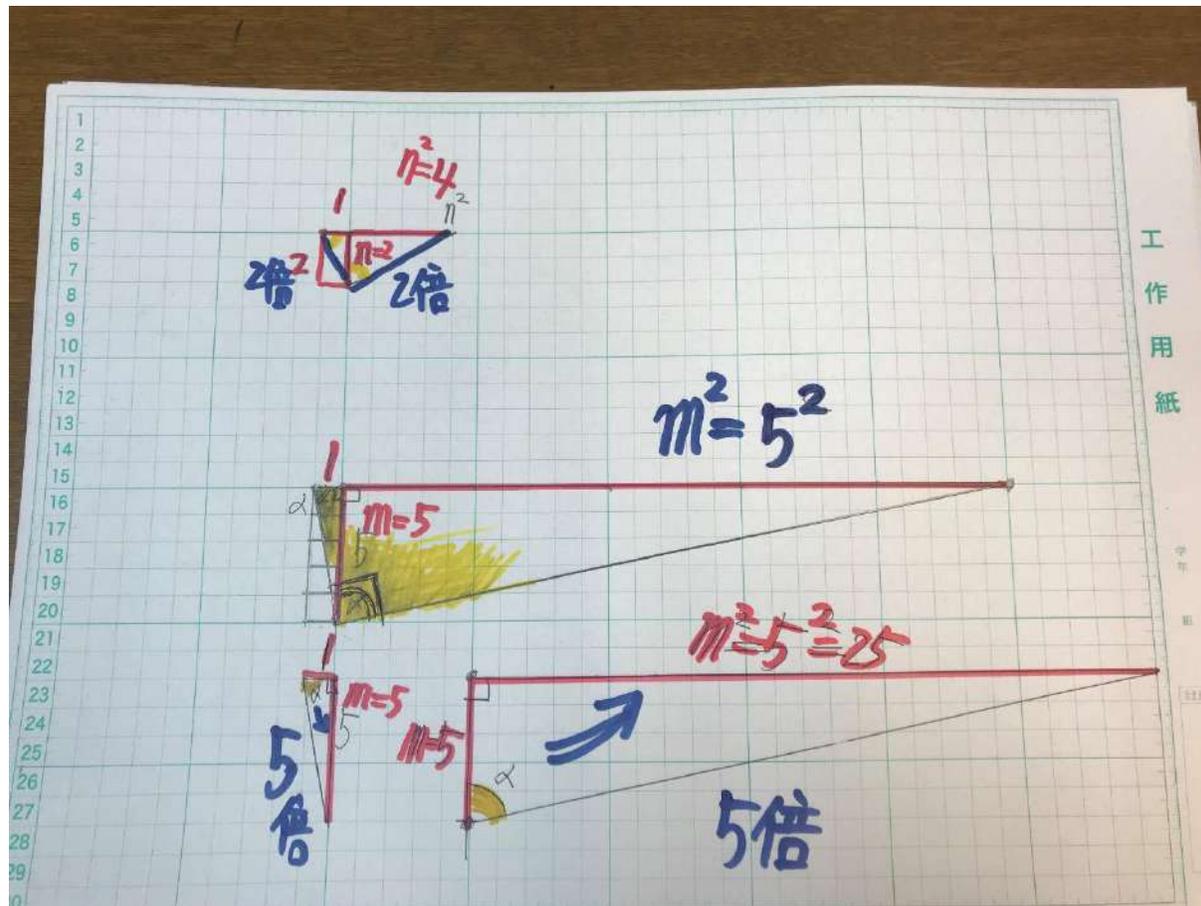
原始ピタゴラス数の3分木



原始ピタゴラス数と種となる2数mnの3分木



自乗作図の新概念



発見当時の報告

授業が変わる

たのしい授業が見つかるこの1冊

6社の新教科書
すべてに
完全対応

まったく新しい
実践と内容

編集
銀林 浩/相原 昭/鈴木一己/和田常雄

わかる教え方

算数

学年別
全日巻 定価各2,000円(税込)

- 教科書を使って、子どもにわかるたのしい授業を展開するにはどうしたらよいか。
- 算数好きの子どもをふやすには、どんな工夫をすればよいか。

そんな先生の願いを叶えるため、すべての単元ごとに、教科書の問題点・授業の実践の展開例を示した、12の教科書活用シリーズです。

教科書会社ごとの単元の組み替え表を巻末に掲載。

国土社 重版出来

〒112 東京都文京区目黒台1-1-4 ☎03(354)3771 FAX 03(354)3332

T1005421010606 03(354)3771

1993年11月号 第34巻第11号 No.414

教師・父母・学生のための算数・数学教育誌

数学教室

特集 □ 第7回国際数学教育会議から

1 '93

数学教育協議会編集/国土社刊

●こ・そ・あ・ど・ん な こと●

ピタゴラスの夢、バビロンへの想い

(原始ピタゴラス三角形の三連乗上の生成と構造的な2次加法)

亀井喜久男(岐阜)

私は古代の数学創成期の魅力に引かれて、エジプトのものを教材化しました。ここ数百年に各文明で発見されていた原始ピタゴラス三角形について整理してみました。何年かの全国初等算数研究会での発表で、産物をはじめての表が1であるピタゴラス三角形についてのトワイニング式を示しました。

次のものです。

図A

$$a_1 = 0, b_1 = 1, c_1 = 1$$

$$a_2 = 3, b_2 = 4, c_2 = 5$$

$$a_{n+1} = 6 \cdot a_n - a_{n-1} + 2$$

$$b_{n+1} = 6 \cdot b_n - b_{n-1} + 2$$

$$c_{n+1} = 6 \cdot c_n - c_{n-1}$$

す。 (a_n, b_n, c_n) とすると

す。 $(20, 21, 29)$
 す。 $(119, 120, 169)$
 す。 $(696, 697, 985)$
 す。 $(4056, 4058, 5741)$
 す。 $(23660, 23661, 33461)$

この整数は直角三角形の直角二等辺三角形にどんな点をつけていくもので、その近似方法を考えられます。

(a_n, b_n, c_n) のどれか2つに収束して行きますが、はじめのは上から、後の2つは下から近づきます。この近似法の長所は a_n と b_n の差が1のピタゴラスを構成しながら進むので、通分数は取りうるステップの整数が増えやすいところにあります。

図B

$a_n = 6a_{n-1} - a_{n-2} + 2$
 $b_n = 6b_{n-1} - b_{n-2} + 2$
 $c_n = 6c_{n-1} - c_{n-2}$

す。 (a_n, b_n, c_n) とすると

す。 $(20, 21, 29)$
 す。 $(119, 120, 169)$
 す。 $(696, 697, 985)$
 す。 $(4056, 4058, 5741)$
 す。 $(23660, 23661, 33461)$

●こ・そ・あ・ど・ん な こと●

の特。 $a = 33461, b = 47321$ となり

$\frac{b}{a} = \frac{47321}{33461}$ で 10 進展開すると

1.424242135825825825 となり

ます。水田浩司氏の BASIC で 100 桁を求めるのに約 1 秒で出来ました。

さてこの漸化式は隣接2ベクトルの形に直すことが出来る

$$a_{n+1} = 2 \cdot a_n + 1 \cdot a_{n-1} + 2 \cdot c_n$$

$$b_{n+1} = 2 \cdot b_n + 2 \cdot a_{n-1} + 2 \cdot c_n$$

$$c_{n+1} = 2 \cdot c_n + 2 \cdot a_{n-1} + 2 \cdot c_n$$

と書き

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とすることで $T \cdot A^n \cdot T^{-1}$ と変換出来ます。3次元の等比数列が原始ピタゴラス三角形の中に発見出来ました。しかも自然数1, 2, 3, だけの対称行列だったわけですね。数学科の教授や准教授の式札以上の議論の中で、ピタゴラス三角形が素数として得る自然数と平方数から生み出される系列の(1, 4, 5), (5, 12, 13), (7, 24, 25) 以外にも

$$a_{n+1} = 10 \cdot a_n + 2 \cdot c_n \quad (1-2 \cdot 2)$$

$$b_{n+1} = 10 \cdot b_n + 2 \cdot c_n \quad (2-2 \cdot 2)$$

$$c_{n+1} = 10 \cdot c_n + 2 \cdot c_n \quad (3-2 \cdot 2)$$

があることを発見。さらに自然数の

連数が2つ違う時の高次である(1, 1, 5), (15, 8, 17), (25, 31, 37), (45, 52, 60) なども

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 10 & 2 \\ 10 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

があることを探し出しました。上記のようにあるとすると原始三角形を「変換、偶数」の形で取り扱うために、はじめの行列ある1行と2行を入れかえ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

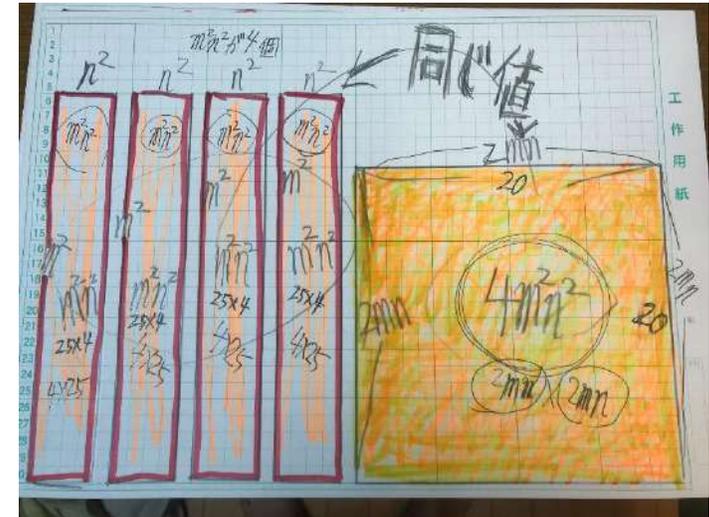
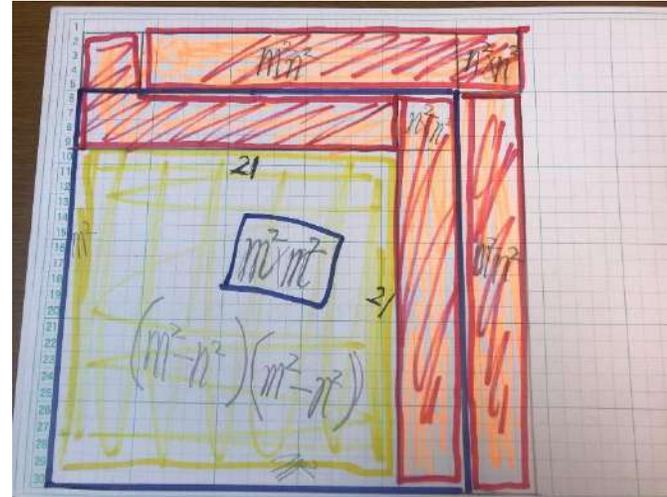
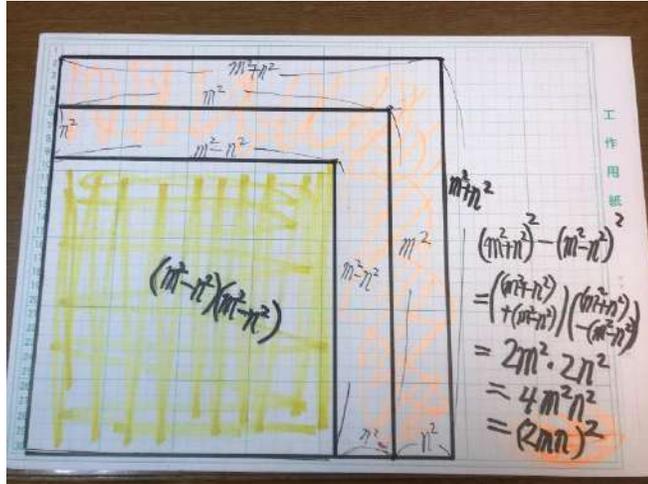
すると驚くべきことに

$$T = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

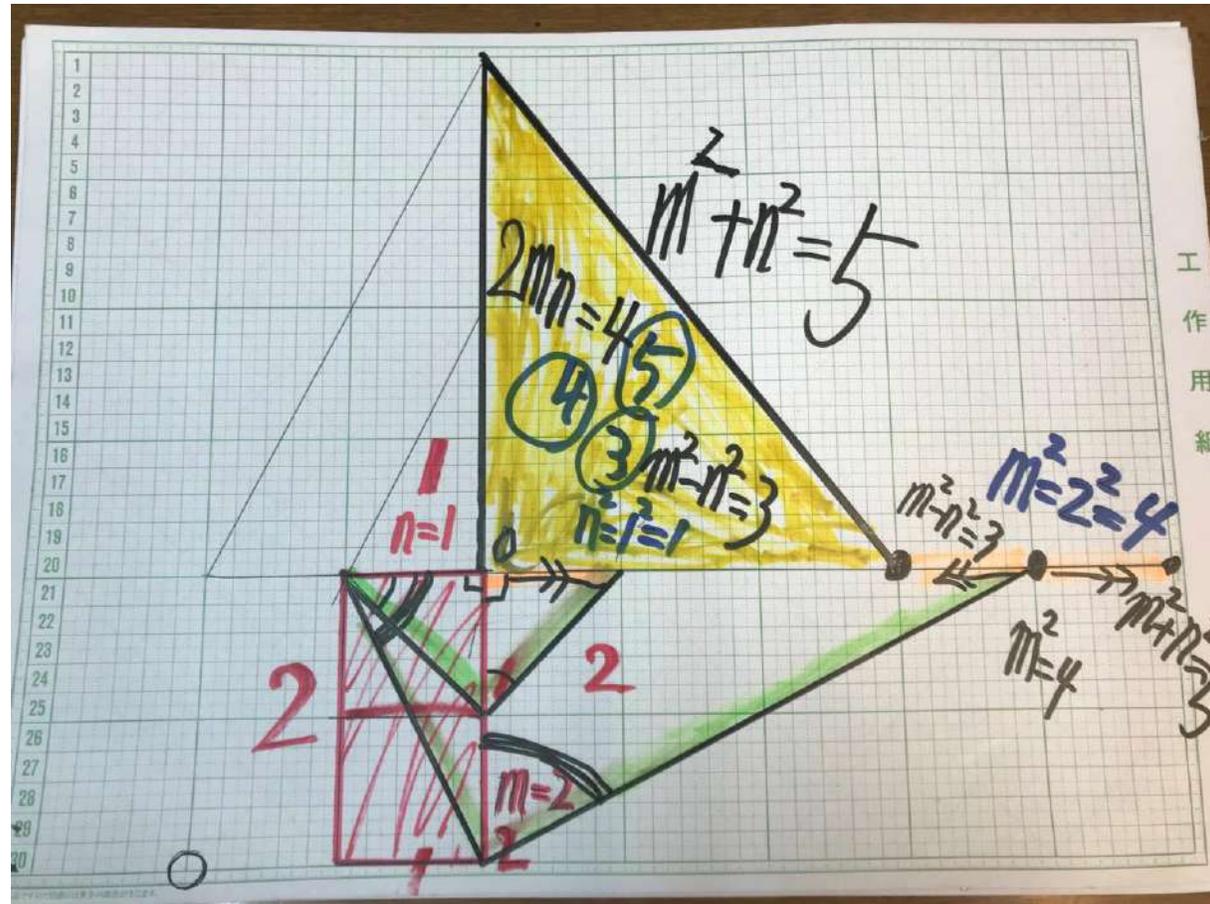
を出发点とする3乗行列構造が出現しました。

105

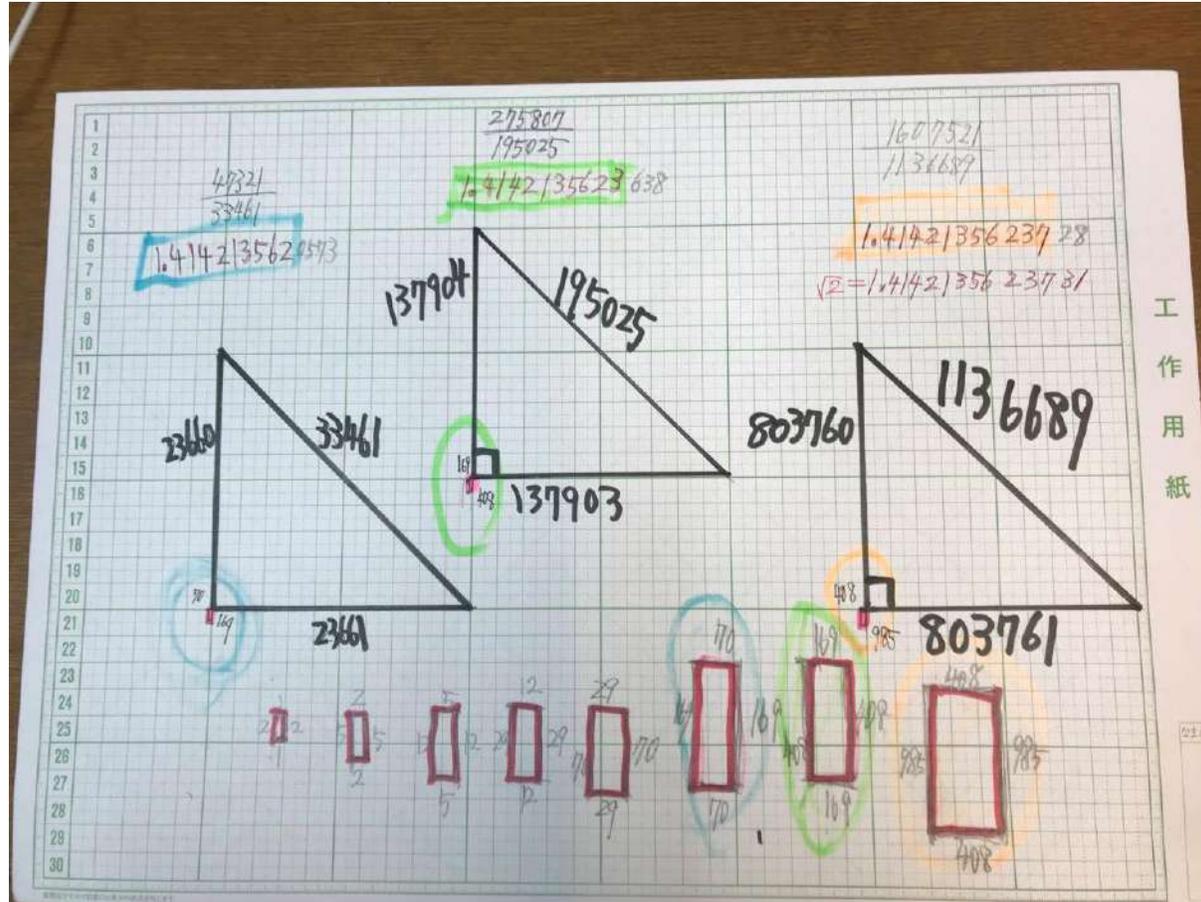
種から形成した三角形がピタゴラスかどうか、 これには自乗の図よりも平方の図が適切



21, 20, 29のほかにも3, 4, 5でも確認



超高精密近似 種 $m=985$ 、 $n=408$ から



原始ピタゴラス数

種の三分木

それを活用した

$\sqrt{2}$ の超高精密近似

のお話終わりです。

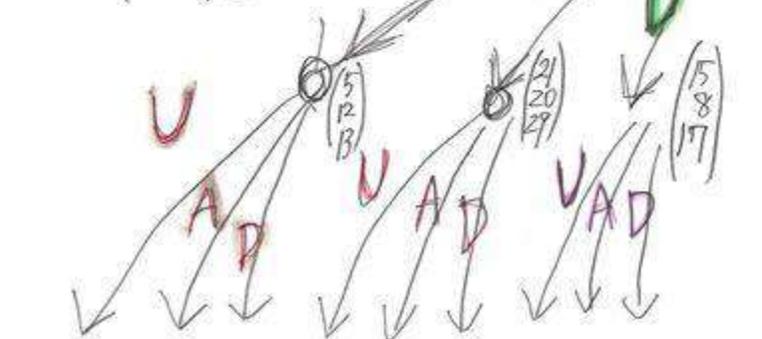
ご清聴ありがとうございました。

おまけ

$$U = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} bc \text{ 差保存} \\ \text{左から順に} \\ \text{左から順に} \end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} ab \text{ 差保存} \\ \text{左から順に} \end{array}$$

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} ac \text{ 差保存} \\ \text{左から順に} \end{array}$$

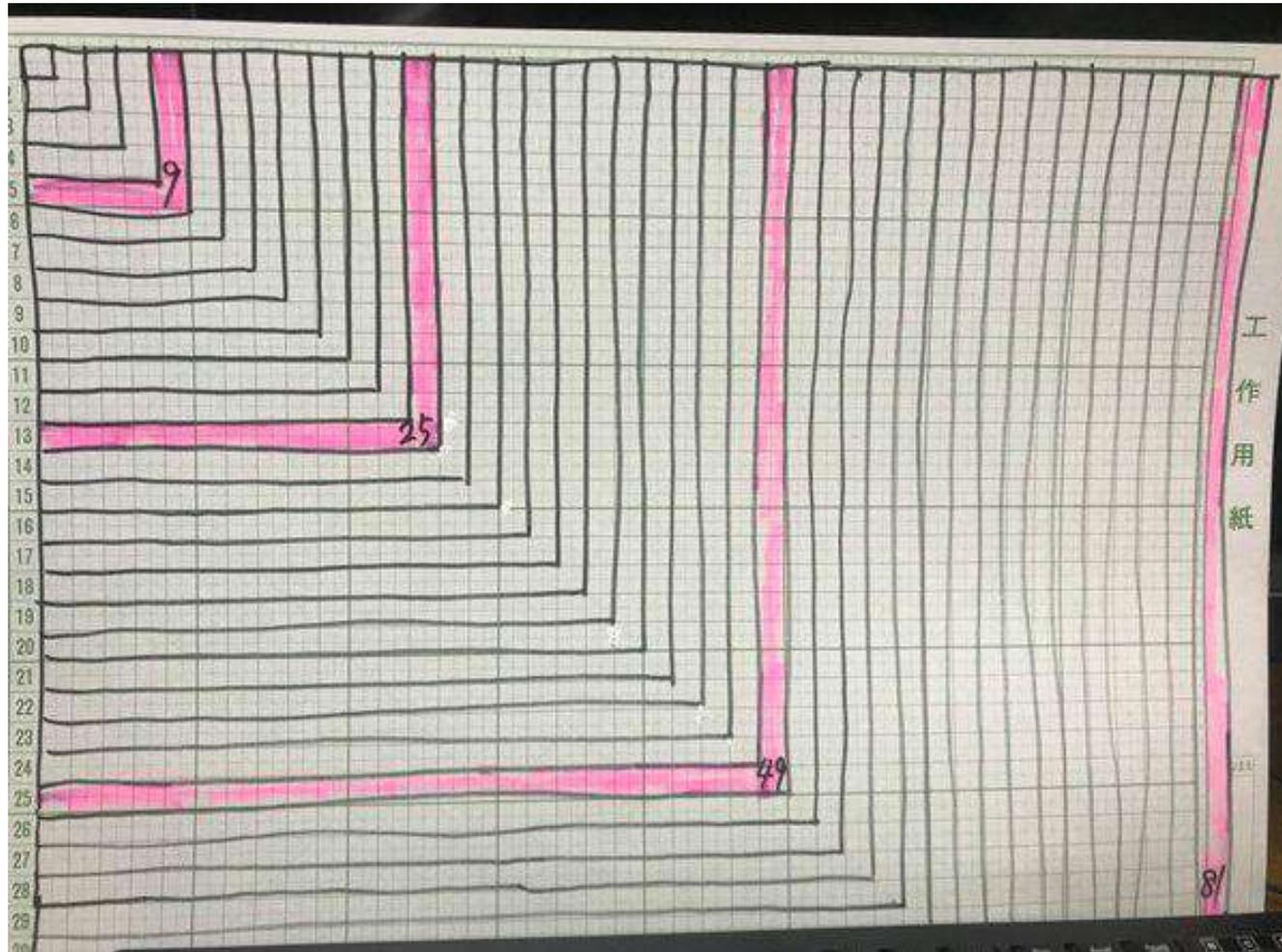


$$\begin{pmatrix} 7 \\ 24 \\ 25 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 55 \\ 48 \\ 73 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 45 \\ 28 \\ 53 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 39 \\ 80 \\ 89 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 119 \\ 120 \\ 169 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 97 \\ 36 \\ 85 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 33 \\ 56 \\ 65 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 65 \\ 72 \\ 97 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 35 \\ 12 \\ 37 \end{pmatrix}$$

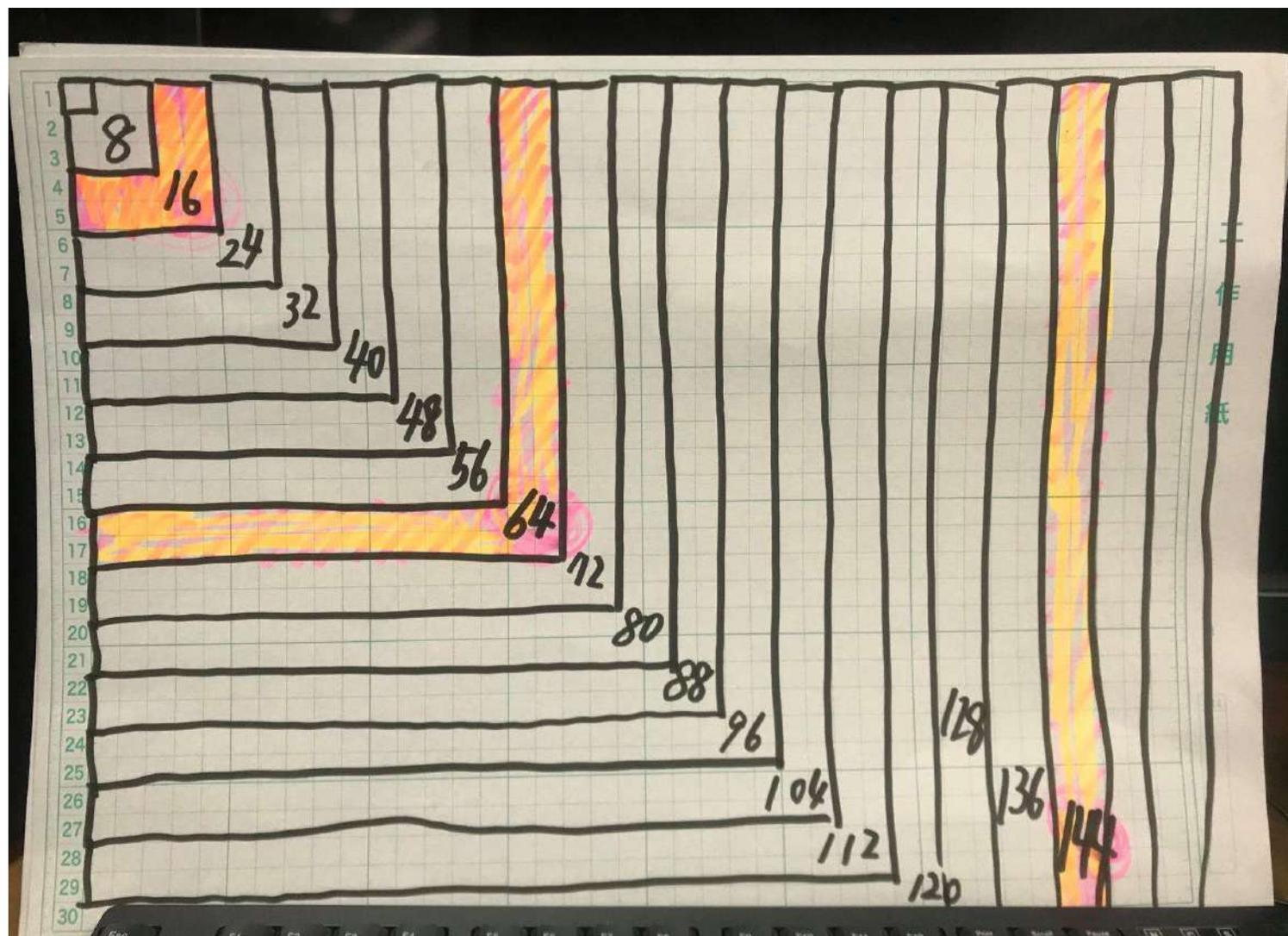
$$UU_p \quad AU_p \quad DU_p \quad UAp \quad AA_p \quad UD_p \quad DA_p \quad AD_p \quad DD_p$$

一般のハ外れに対する行列の左からの計算

小石算 ピタゴラス学派の業績



小石算 奇数グノモン連続貼り付けが偶数平方数になるときが存在すること発見



プラトン系列の短辺張り付け

