四角い三角形

2024/07/31 (var 1.1)

目次

補足

はじめに

現在の初等教育（義務教育）では、中学校の三年生の数学の授業で「三平方の定理」というものを教わります。「三平方の定理」は、かつて「ピタゴラスの定理」と呼ばれていて、「ピタゴラスが発見した」とも云われていました。
ただし直角三角形の性質は、おそらくは紀元前二十世紀くらいにはけっこう知られていました。クフ王の王墓とされるギザの大ピラミッドが建っているですから。それが分かっていたので、「ピタゴラスの定理」が「三平方の定理」と改称されたようです。
ところが二十一世紀になって、「古代メソポタミアの数学粘土板の双璧」と云われる二枚の粘土板（プリンプトン３２２とYBC 7289）をパソコンを使って解読してみたところ、古代メソポタミアの数学は意外に高度なものだったということが判りました。ただし、なにしろメディアが粘土板なので、結果だけ書いてあって証明がないというのが困りものです。
ただし、その成果は（少なくとも三平方の定理に関しては）七世紀インドのブラフマグプタや十七世紀のピエール・ド・フェルマーにも先んじていて、二十世紀に証明された B=H=K 定理にまで及んでいました。

ただし、こういう面白い話は、学校や学習塾や予備校では、なかなかしてもらえません。試験に出ないからです。

現在では「ゆとり教育」は流行りではないため、どうしても「受験対策」に重きが置かれます。中学・高校の数学教育においては、高校受験や大学受験への対策にどうしても重きを置かざるをえません。そのためなかなか基礎的な数学力を鍛える機会が持てません。
高校に入ってから授業で挫折し、大学に入ったら入ったでまた挫折して就活で挫折し、社会に出たら出たでまた計数感覚とか思考力が追いつかなくて挫折するという人も少なからずいます。これが社会的資源の無駄遣いでなくてなんでしょう。
かつて「受験戦争」と呼ばれた時代にも、遠山 啓『無限と連続』『初等整数論』『現代数学の考え方』やら高木貞二『解析概論』とかフツーに読んでいた高校生がいました。
受験数学では「他の人に訊いてはいけない」「資料持込不可」「電卓は使ってはならない」「論述式の問題が少ない」など、いろいろな制約があります。ですが社会に出たら、チームを組んで、資料を探しネットでデータを集めて、パソコンで書類を作るというのが普通です。こういう時に“使える”奴は地頭がいいというか、「学問の首根っこを ふん捕まえている」感じがします。
小平 邦彦先生には『ボクは算数しか出来なかった』という自伝があります。矢野 健太郎先生は『お母さまのさんすう 新版』『数学の考え方』を著しています。一松 信先生には『教室に電卓を！』『整数とあそぼう』などがあります。とにかく数学にはあっちゃこっちゃに門があり、間口は広いわ敷居は低いわ、壁なんかあって無きがごとしの世界で、しかもその庭は「広大な遊び場」です。

数学者の遠山 啓さん（タイルを教具として広めました）が小学生を相手に数学を教え、「これは授業か、それとも遊びか？」と尋ねたら、「面白かったから、“遊びだ”」と答えたという話があります。亀井喜久男先生（「エジプトひも」という教具を広めたかたです）も、B=H=K 定理の発見者のおひとりです。

これにパソコンが加わるとどうなるか。パソコンを全速でぶん回しても、誰にも叱られません。面白いですよ？

用語について

- 自然数 {x, y, z} について、$x^2 + y^2 = z^2$ が成り立つものを**ピタゴラス数**と呼ぶ。
- 辺の長さがピタゴラス数である三角形を**ピタゴラス三角形**と呼ぶ。
- ピタゴラス数のうち、x と y が互いに素であるものを**原始ピタゴラス数**という。このとき x と z、y と z もまた互いに素である。
- 辺の長さが原始ピタゴラス数である（直角）三角形を**原始ピタゴラス三角形**と呼ぶ。

なお、原始ピタゴラス三角形の辺長は、{3, 4, 5} とか {4, 3, 5} とか書くのですが、本文書では{奇数, 偶数, 残りのいちばん長い辺の長さ(これは必ず奇数です)}の順番, すなわち {o(odd), e(even), d} の順番で書くことにします。奇数辺と偶数辺のどちらが長いかが分かっているときには、ときどき {a, b, c}（$a < b < c$）と書く流儀があります。

第 1 章：ピタゴラス三角形

とりあえず直角三角形を想像してください。このとき斜辺の長さが自然数であるとします。これが「百以下の自然数」である場合を考えましょう。そうすると一万個あります。
ここで、直角をはさむ二本の辺の長さが、ともに自然数になるものを考えます。
このとき、「直角をはさむ二本の辺の長さがともに百以下の自然数である長方形」はいくつあるでしょうか？
そうすると、直角三角形の辺長を {x, y, z} とし、「いわゆるユークリッド平面上では「三角形の二辺の長さの和は対角線の長さ以下である。」ということは既知としましょう。『$1 \leqq x \leqq 100$』かつ『$1 \leqq y \leqq 100$』かつ『$x^2 + y^2 = z^2$』」が成立する場合を見つければいいわけです。このとき $1 < z < (x + y)$ の範囲で z を探せばいい。
全部で一万通りあるケースをぜんぶチェックするのは、人間にとっては大変ですが、コンピュータで探すぶんには一晩あれば充分なはずです。やってみましょう。結果はこれです。

{3, 4, 5}, {4, 3, 5}, {5, 12, 13}, {6, 8, 10}, {7, 24, 25}, {8, 6, 10}, {8, 15, 17}, {9, 12, 15}, {9, 40, 41}, {10, 24, 26}, {11, 60, 61}, {12, 5, 13}, {12, 9, 15}, {12, 16, 20}, {12, 35, 37}, {13, 84, 85}, {14, 48, 50}, {15, 8, 17}, {15, 20, 25}, {15, 36, 39}, {16, 12, 20}, {16, 30, 34}, {16, 63, 65}, {18, 24, 30}, {18, 80, 82}, {20, 15, 25}, {20, 21, 29}, {20, 48, 52}, {20, 99, 101}, {21, 20, 29}, {21, 28, 35}, {21, 72, 75}, {24, 7, 25}, {24, 10, 26}, {24, 18, 30}, {24, 32, 40}, {24, 45, 51}, {24, 70, 74}, {25, 60, 65}, {27, 36, 45}, {28, 21, 35}, {28, 45, 53}, {28, 96, 100}, {30, 16, 34}, {30, 40, 50}, {30, 72, 78}, {32, 24, 40}, {32, 60, 68}, {33, 44, 55}, {33, 56, 65}, {35, 12, 37}, {35, 84, 91}, {36, 15, 39}, {36, 27, 45}, {36, 48, 60}, {36, 77, 85}, {39, 52, 65}, {39, 80, 89}, {40, 9, 41}, {40, 30, 50}, {40, 42, 58}, {40, 75, 85}, {40, 96, 104}, {42, 40, 58}, {42, 56, 70}, {44, 33, 55}, {45, 24, 51}, {45, 28, 53}, {45, 60, 75}, {48, 14, 50}, {48, 20, 52}, {48, 36, 60}, {48, 55, 73}, {48, 64, 80}, {48, 90, 102}, {51, 68, 85}, {52, 39, 65}, {54, 72, 90}, {55, 48, 73}, {56, 33, 65}, {56, 42, 70}, {56, 90, 106}, {57, 76, 95}, {60, 11, 61}, {60, 25, 65}, {60, 32, 68}, {60, 45, 75}, {60, 63, 87}, {60, 80, 100}, {60, 91, 109}, {63, 16, 65}, {63, 60, 87}, {63, 84, 105}, {64, 48, 80}, {65, 72, 97}, {66, 88, 110}, {68, 51, 85}, {69, 92, 115}, {70, 24, 74}, {72, 21, 75}, {72, 30, 78}, {72, 54, 90}, {72, 65, 97}, {72, 96, 120}, {75, 40, 85}, {75, 100, 125}, {76, 57, 95}, {77, 36, 85}, {80, 18, 82}, {80, 39, 89}, {80, 60, 100}, {80, 84, 116}, {84, 13, 85}, {84, 35, 91}, {84, 63, 105}, {84, 80, 116}, {88, 66, 110}, {90, 48, 102}, {90, 56, 106}, {91, 60, 109}, {92, 69, 115}, {96, 28, 100}, {96, 40, 104}, {96, 72, 120}, {99, 20, 101}, {100, 75, 125}
なるべく素朴な方法で（あまりにも素朴なので、ソースコードは省略します）この値を計算してみると、一万個あったものが 126 個まで減りました。1.26 % です。私のパソコンでは 計算時間は 0.045 秒かかりました。
ところが、この中には、「より小さい長方形と相似であるもの」（≡ 二つの辺が互いに素ではないもの）も含まれています。それを除いてみましょう。こうなります。

{3, 4, 5}, {5, 12, 13}, {7, 24, 25}, {8, 15, 17}, {9, 40, 41}, {11, 60, 61}, {12, 35, 37}, {13, 84, 85}, {16, 63, 65}, {20, 21, 29}, {20, 99, 101}, {28, 45, 53}, {33, 56, 65}, {36, 77, 85}, {39, 80, 89}, {48, 55, 73}, {60, 91, 109}, {65, 72, 97}

これで 18 個 まで減りました。計算時間は 0.057秒。
これを見ると、「斜辺の長さは奇数」「直角をはさむ二辺は、一方は奇数、一方は偶数」でありそうだ、という見当がつきます。
そんなわけで、これを{奇数辺, 偶数辺, 斜辺}（これを {o, e, d} と置きます）の順にして整理すると、こんなことになります。

{3, 4, 5}
{5, 12, 13}
{7, 24, 25}
{9, 40, 41}
{11, 60, 61}
{13, 84, 85}
{15, 8, 17}
{21, 20, 29}
{33, 56, 65}
{35, 12, 37}
{39, 80, 89}
{45, 28, 53}
{55, 48, 73}
{63, 16, 65}
{65, 72, 97}
{77, 36, 85}
{91, 60, 109}
{99, 20, 101}
これは「原始ピタゴラス数」と呼ばれるものと一致します。
この偶数辺の辺長は、4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 36, 40, 48, 56, 60, 72, 80, 84, ……と、なんとなく 4 の倍数のような気がしてきます（実際に 4 の倍数です。詳細は、附録 1 の原始ピタゴラス数の諸性質を参照してください）。

とは言いつつも、私はこの手の話題にはまったく興味はありませんでした。ところが、一通のお手紙が三千八百年くらい昔のメソポタミアから届いて、こんなことになりました。その手紙を、プリンプトン３２２といいます。

第２章：プリンプトン３２２

ノイゲバウアーは、「プリンプトン３２２」（以下、「P322」）という約三千八百年前の古代バビロニアの時代に記された数学粘土板を分析したところ、十五個のピタゴラス数が記されていることを 1951年（戦後とはいえ、日本はまだ占領下です）に指摘しました。そのうえで、「これは数論的に解釈したほうがいいだろう」と提言されました。

ただし、欧米の（数学方面以外の）研究者は数論的なアプローチを取らず、「P322 は何のために作成されたのか？」とかいった方面に行ってしまいました。エジプトやメソポタミアなどの「東方世界の数学」を甘く見ていたのか、それともプログラムが書けなかったのか。

さて、これが P322 です。ほぼパスポートサイズです。

この粘土板は、当時一般的だった六十進数で書かれています。

P322 （オリジナル）

$c^2 \div b^2$	a	c	番号
(1:)59:00:15	1:59	2:49	**1**
(1:)56:56:58:14:50:06:15	56:07	1:20:25	**2**
(1:)55:07:41:15:33:45	1:16:41	2:49	**3**
(1:)53:10:29:32:52:16	3:31:49	5:09:01	**4**
(1:)48:54:01:40	1:05	1:37	**5**
(1:)47:06:41:40	5:19	8:01	**6**
(1:)43:11:56:28:26:405	38:11	59:01	**7**
(1:)41:33:45:14:03:45	13:19	20:49	**8**
(1:)38:33:36:36	1:59	12:49	**9**
(1:)35:10:02:28:27:24:26	1:22:41	2:16:01	**10**
(1:)33:45	45	1:15	**11**
(1:)29:21:54:02:15	27:59	48:49	**12**
(1:)27:00:03:45	2:41	4:49	**13**
(1:)25:48:51:35:06:40	29:31	53:49	**14**
(1:)23:13:46:40	56	1:46	**15**

表 1.

「00」が二か所に出てきますが、これは「空位の零」であって、楔形文字では「二十」を横にしたような記号を使っていました。一般的な原始ピタゴラス数の一般式は、{o(odd、奇数), e(even、偶数), d(diagonal、対角線)} として、

ユークリッドによる原始ピタゴラス数

- {o, e, d} ＝ { $n^2 - m^2$, 2mn, $m^2 + n^2$ }
- ただし、m と n は互いに素であり、かつ m と n の偶奇は異なる。ここでは m＜n とする。

{o, e, d} から m と n を求めるときは、

$o + d = (n^2 - m^2) + (m^2 + n^2) = 2n^2$

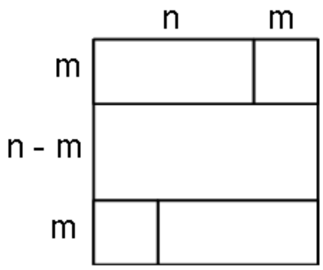
$\therefore n = n^2 / 2$

$e = 2mn$

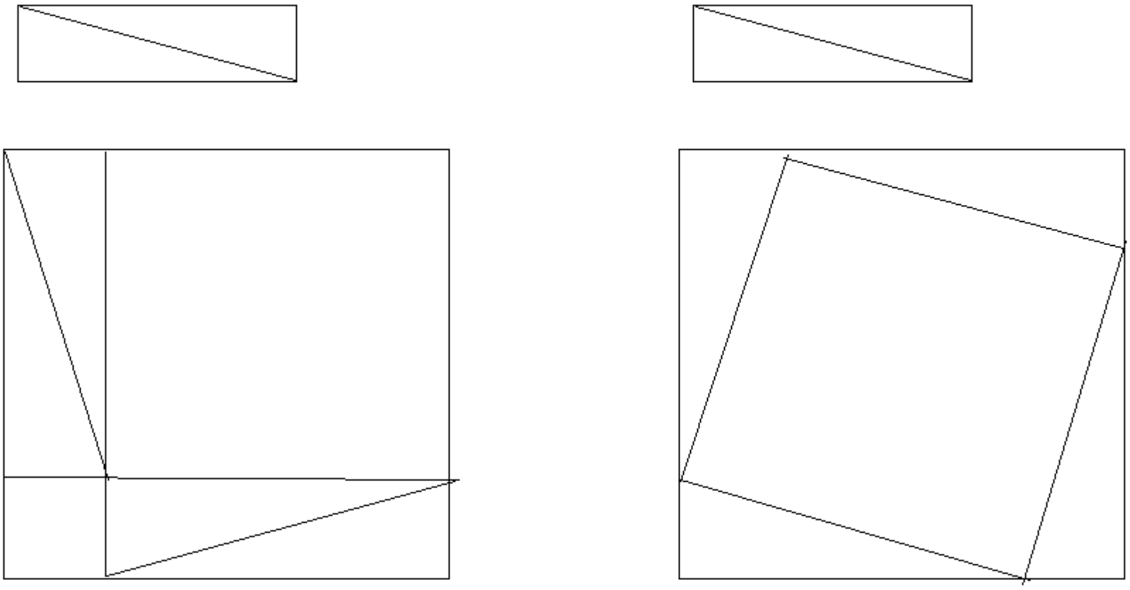
$\therefore m = o / 2n$

を用います。

の形が知られています
　これはユークリッドの時代から知られていて、おそらくはこのような図形から求められたようです。



これは、



という二つの図形から三平方の定理を証明する方法で、二つの m × n の長方形を取り去った部分が X の平方と Y の和に等しくなる、ということを利用しています。　ところが、この式を使ってプログラムを書き、0 < m < n < 180 の範囲についてパソコンで実行してみると、いちおうそれらしい値は出てきます。ところが、その個数は 18 個であり、P322 に記された 15 個の値とは一致しません。つまり、m と n がどのような根拠で選ばれたのかがよくわかりません。
　そのため、「これは三角関数に関する表ではないか？」と考えた人もいました。1995年、ジョイスという人が「P322 の値は三十度から四十五度の範囲に収まっており、およそ一度刻みになっている」という意見を述べたのですが、エレノア・ロブソンという研究者が「空想的で時代錯誤である」と、この説を否定しました。
　2002年には、ロブソンは「P322の作者はプロの数学者でもアマチュアでもない。それよりもむしろ作者は教師であり、P322は『正則な逆数の組の表』（意味不明ですが、WikiPediaにそう書いてありました）である」「P322は書記見習いのための練習用の課題であると思われる」と主張しました。これは「15 個の値が、どのような観点から選ばれたのか？」に対して「教師がなんとなく選んだ」と応えるという じつに身も蓋もない話です。

　じつは「はじめに」で紹介した「原始ピタゴラス数」という命名がトラップでした。「ピタゴラス」といえば「ピタゴラスの定理」を連想し、「直角三角形の辺長に関する定理」とみなされてしまいます。古代バビロニアでは、直角三角形の辺長に関する定理ではなく「長方形の隣接する二辺(≡ 並行ではない二辺)と対角線の長さに関する定理である」と考えられていたようです。
　なにしろメソポタミア（「河の間の土地」の意）は「ティグリス＝ユーフラテス文明」とも呼ばれるように、ティグリス河の近くです。「ティグリス」は「矢のように速い」と云われた暴れ川であり、氾濫によって一面が泥の海になります。そうなると建材は日干し煉瓦です。そんなところに入植してきたのがシュメール人です。それでも農耕も行われ、なんとか生活できるようになったところで入植してきたのアッカド人で、いわゆるバビロニアもアッカド語を公用語としていました。
　当時は家畜としての牛もいたようです。そうすると畑はどうしても長方形ということになります（変な形では牛が入れません）。そのため書記の仕事はまず測量と、変な形の土地の面積を求めることになります。そこで、バビロニアの書記の気分になって、「並行でない二本の辺の長さの平方和が、対角線の長さの平方に等しい長方形を考え、これを以下では 「バビロニア長方形」と呼ぶことにします。

　また、原始ピタゴラス数 {a, b, c} （a < b < c）に対応する、「短辺長が a 、長辺長が b, 対角線長が c であるバビロニア長方形」を考え、それを「原始バビロニア長方形」と呼ぶことにします。また、「形状比（aspect ratio。航空業界ではAR ともいいます。以下AR）」を b ÷ a と定義します。 a:b と比で考えると、小学校で教えられる「比の値」は a ÷ b なので、AR と比の値は逆数の関係になり、多少ややこしくなるので注意してください。

　これは何を表しているかというと、「1 < AR < φ （φ は黄金比で、≒ 1.618 ）の範囲で、長辺長 b が 1・3・5 以外の素因数を持たないバビロニア長方形 15 個の表」です。二個を除いた十三個は原始バビロニア長方形です。

バビロニアの長方形

ここまでは、「直角三角形」「ピタゴラスの定理」「原始ピタゴラス数」を基礎とした議論でした。図形的には「三辺の長さがすべて自然数であり、互いに素である直角三角形」を考えています。ですが、これを長方形だと考えたらどうでしょう。
「三角形の合同条件」は三つあり（小学校で教わります）、

- 三辺合同
- 二辺夾角
- 二角夾辺

なので、「長方形の短辺・長辺・対角線の長さがすべて自然数である長方形」を「バビロニア長方形」と考えたらどうだろうかと考えました。つまり「二辺夾角」なので夾角が直角なのだから、二本ある対角線のいずれかで切れば合同な直角三角形がふたつできるわけです。
というので Java 言語でプログラムを書き、 $0 < m < n \leqq 180$ の範囲内で、正方形と黄金長方形の間にある「原始バビロニア長方形」を網羅的に探したんですけれど、これがまた微妙に違ったりしました。15 個じゃなくて 18 個になってしまいます。私はプログラマなので、「古代バビロニアの書記が、こんなポカをするわけがない」と思いました。じゃあ、プログラマ（＝私）が間違っているわけです。そこで見直しです
ギリシャ式の一般式のほかに、七世紀のインドのブラフマグプタが書き残した以下の式があります。

ブラフマグプタによる原始ピタゴラス数

- $\{o, e, d\} \equiv \{ pq, (q^2) - p^2) / 2, (p^2 + q^2) / 2 \}$
- ただし、p と q はともに奇数であり、互いに素である。ここでは $p < q$ とする。

ここから [p, q] を求めるには、 $e + d = (q^2 - p^2) / 2 + (p^2 + q^2) / 2 = q^2$

$\therefore q = \sqrt{q^2}$

$o = pq$
$p = o / q$

P322 オリジナルの書式のままではわかりにくいので、十進数に直して列を入替え、省略された値を補ったものが、こちらです。

P322 （解読済み・十進補正版）

番号	(p, q)	{a, (b,) c}	AR(= b/a)
1	(7, 17)	{119,(120,)169}	1.008
2	(37, 91)	{3367,(3456,)4825}	1.026
3	(43, 107)	{4601,(4800,) 6649}	1.043
4	(71, 179)	{12709,(13500,) 18541}	1.062
5	(5, 13)	{65,(72,) 97}	1.108
6	(11, 29)	{319,(360,) 481}	1.129
7	(29, 79)	{2291,(2700,) 3541}	1.179
8	(17, 47)	{799,(960,) 1249}	1.202
9	(13, 37)	{481,(600,) 769}	1.247
10	(41, 121)	{4961,(6480,) 8161}	1.306
11	(1, 3)	{3,(4,)5}×15={45,(60,) 75}	1.333
12	(23, 73)	{1679,(2400,) 2929}	1.429
13	(7, 23)	{161,(240,) 289}	1.491
14	(23, 77)	{1771,(2700,) 3229}	1.525
15	(5, 9)	{23,(45),53}×2={56,(90,)103}	1.607

表 2.

答えは 15 個となって、P322 と一致します。
これは何を表しているかというと、「$1 < AR < \varphi$ （φ は黄金比で、≒ 1.618 ）の範囲で、長辺長 b が 1・3・5 以外の素因数を持たないバビロニア長方形 15 個の表」です。１１番と１５番を除いた 13 個は原始バビロニア長方形です。

えー、この表を見るとかなり笑えます。最初は $0 < p < q < 60$ くらいで止めとこうと思ったと思うんですよ。ところが、「いや、もうちょっと先まで」と思って 90 まで計算したら１２番とか１３番とか出てきて、 180 まで足を延ばしたら１０番や４番が出てきちゃった、という気配があります。何人で計算したか分かりませんが、「この結果を棄てるのはもったいない」と思って粘土板に記してから、１１番と１５番でお茶目をした奴がいた、という話ではないかと。
４番の (71, 179) に着目すると、P322 は確かに $0 < p < q < 180$ の範囲について計算されたものだということが見てとれます。
ただ、これだけでは「なぜこの範囲で計算されたのか？」という問いには完全には答えられません。そこで「 $0 < p < q < 180$」の範囲で「b は「2・3・5 以外の素因数を持たない自然数」（「正則数」といいます）という条件を外し、形状比AR（$= c / b$）が 1 近辺と φ（φ は黄金比）近辺を細かく探ってゆくと、この範囲に収まることがわかりました。つまり、P322 は確かに「正方形と黄金長方形の間にある原始バビロニア長方形のうち、長辺が正則数のものの表である」ということがわかりました。
ただし、こうなると「書記たちは、どうやってφを計算したのか？」という問題が浮上します。「黄金数φはフィボナッチ数列の二項の比で表される」のはよく知られていますが、フィボナッチはまだ生まれておらず、古代バビロニアには数式もないので数列は無理です。そうするとフィボナッチ螺旋経由で思いついたというのが順当ではないのかと思います。とはいえ、計算してみるとこの収束が意外に遅いわけです。そうすると、書記は正規連分数とかにも興味を持っていて、「黄金比φはこれくらいの数だろう」という計算はすでに行なわれていて、それが六十進小数として知られていたのかもしれません。

こうして P322 は解読されたものの、謎がひとつ増えてしまいました。P322 が作られたのは起源前十八世紀です。インド式の公式の

記録は七世紀なので、おおむね二千四百年違います。
　とはいえメソポタミアとインダス河流域はお互いに交流があったので、「東方数学つながり」なだけかもしれませんが。
　ここで、長方形 Y の面積は $p \times q$ です。この p と q が互いに素であれば、これは原始ピタゴラス数の奇数項 o に一致することが分かります。また、三角形 X の面積は偶数項 e と一致します。残った部分の面積 Z は、原始ピタゴラス数$\{a < b < c\}$ と置いたときの c の値と一致します。
　ここまでは P322 に記録された数値の話なのですが、これが「原始ピタゴラス数は三分木構造をなす」という現代の話につながります。

> 　なお、このあたりの話にハマッた人に、ノーベル物理学者のリチャード・ファインマンさんがいらっしゃいます。ノイゲバウアー先生と親交があり（息子さんは赤外線天文学者で勤務先が同じだったこともあるとか）、「ドレスデン・コーデックス」というマヤの古文書を解読し、それがマヤの金星暦であることを突きとめました（R・P・ファインマン著／大貫昌子訳『「御冗談でしょう、ファインマンさん」— ノーベル賞物理学者の自伝 II』、pp213-214）。

第３章：B=H=K定理

　「原始ピタゴラス数は三分木構造をなす」という定理が証明されたのは一九六三年、オランダのバーニング (F.J.M.Barning)によってです。とはいえ論文はオランダ語で書かれているので（ネット上で見られますが、数式は眺めたものの解読は諦めました。『蘭学事始』の二の舞になります）あまり知られませんでした。その後一九七〇年にアメリカのホール (A.Hall)、さらに一九九三年頃に亀井喜久男先生（「エジプトひも」という教具を発案し、普及に努められたかたです。現在は愛知県立大学の非常勤講師をされています）によってそれぞれ独立に発見されました。この定理は一般的には「バーニング＝ホールの定理」と呼ばれることが多いのですが、亀井先生に敬意を表して、「B=H=K 定理」と称すことにします。

　B=H=K 定理は、ある原始ピタゴラス数を転置行列に変換して、三次正方行列である「U(up)」「A(across)」「D(down)」のどれかを掛けると、最小の原始ピタゴラス数である {3, 4, 5} を根としたすべての原始ピタゴラス数が三分木構造で網羅できるというものです。

> 　このとき、行列 U・A・D は
>
> $U = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ - 操作 U(up) は、斜辺と偶数辺の差を保つ。ピタゴラス系列を作る。
>
> $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ - 操作 A(across) は、直角をはさむ2辺の差を (−1)倍にする。フェルマー系列を作る。
>
> $D = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ - 操作 D(down) は、2個の奇数の長さの差を保つ。プラトン系列を作る。
>
> です。

　最小の原始ピタゴラス数 {3, 4, 5} （プログラミング言語 Java では、こう書いて配列として表します）を ρ と書きましょう。これを縦ベクトル（一行三列）と転置行列を書いて、$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ とおいて 一行三列の行列とし、やはり同じようにρと呼ぶことにしましょう）、向かって左側から U・A ・ D という 三次正方行列を掛けてゆきます。

> 　すなわち、
>
> $U\rho = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 13 \end{pmatrix}$
>
> $A\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 20 \\ 29 \end{pmatrix}$
>
> $D\rho = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 8 \\ 17 \end{pmatrix}$

$\rho = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ として、U, A, D の転置行列 ${}^tU, {}^tA, {}^tD$ は

$$^{t}U\begin{pmatrix}-1 & -2 & -2\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

$$^{t}A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

$$^{t}D=\begin{pmatrix}-1 & -2 & -2\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

となり、これを向かって右から掛けても

$$\rho^{t}U=\begin{pmatrix}3 & 4 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ -2 & -1 & -2\\ 2 & 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 12 & 13\end{pmatrix}$$

$$\rho\varepsilon^{t}A=\begin{pmatrix}3 & 4 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}21 & 20 & 29\end{pmatrix}$$

$$\rho\varepsilon^{t}D=\begin{pmatrix}3 & 4 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -2 & -2\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15 & 8 & 17\end{pmatrix}$$

と Uρ, Aρ, Dρとに相当する値が出ます。ただし、Java プログラムのソースコードでは配列どうしの積を求める演算子がないので「バビロニア長方形」という class を定義して解決したのですが、パソコンを使ってちゃちゃっと数値実験してみたかっただけなのに、公開しようと思うと数値演算パッケージを書くとかいった後始末がけっこう大変なことになりました。

ともあれ、これを表にすると、以下のようになります。

原始ピタゴラス数の木

元の数	操作	結果
{3. 4, 5}	Up	{5, 12, 13}
	Across	{21, 20, 29}
	Down	{15, 8, 17}
{5, 12, 13}	Up	{7, 24, 25}
	Across	{55, 48,73}
	Down	{45, 28, 53}
{21, 20, 29}	Up	{39, 80, 89}
	Across	{119, 120,169}
	Down	{77, 36, 85}
{15, 8, 17}	Up	{33, 56, 65}
	Across	{65, 72, 92}
	Down	{35, 12, 87}

表 2.

なお、古代ギリシャにおいては ピタゴラス系列とプラトン系列という二つの系列の一般式が知られていました。
すなわちピタゴラス系列は
{3, 4, 5}、{5, 12, 13}、{7, 24, 25}、{9, 40, 41}、{11, 60, 61}、{13, 84, 85}、{15, 112, 113}、{17, 144, 145}、{19, 180, 181}、{21, 220, 221} ……
という斜辺の辺長と偶数辺の長さの差が 1 である系列であり、プラトン系列は
{3, 4, 5}、{15, 8, 17}、{35, 12, 37}、{63, 16, 65}、{99, 20, 101}、{143, 24, 145}、{195, 28, 197}、{255, 32, 257}、{323, 36, 325}、{399, 40, 401} ……
という斜辺の辺長と偶数辺の長さの差が 2 である系列です。
「これは本当に“原始”ピタゴラス数なのか？」みたいなチェックをしようと思うとプログラムを書かないとやっていられないのですが、計算だけなら表計算ソフトでもできます。
余談ながら、私が小学生のころは函数電卓もパソコンも普及していなかった時代だったので、「こういう数値実験が当時あったらなぁ」と思います。
この二つ以外の系列はピエール・ド・フェルマー(1607 - 1665)が研究するまではそれほど注目されることはなかったようです。これをフェルマー系列と呼ぶとすると、その値は
{3, 4, 5}、{21, 20, 29}、{119, 120, 169}、{697, 696, 985}、{4059, 4060, 5741}、{23661, 23660, 33461}、{137903, 137904, 195025}、{803761, 803760, 1136689}、{4684659, 4684660, 6625109}、{27304197, 27304196, 38613965} ……
です。こちらは偶数辺の辺長と偶数辺の長さの差が 1 である系列です

さて。

このB=H=K 定理は小林 吹代『ピタゴラス数を生み出す行列のはなし』（2008）で少しは知られるようになったものの専門書だったので一般には広く知られることはなく、細矢治夫『トポロジカル・インデックス — フィボナッチ数からピタゴラスの三角形までをつなぐ新しい数学』（改訂版は 2021）も専門書で、一般に知られたのは細矢治夫『三角形の七不思議 — 単純だけど、奥が深い』（講談社、2013）以降です（余談ながら細谷先生とは CorViD19 で御無沙汰しておりますが、面識はあります。そのうち『三角形の七不思議 — 単純だけど、奥が深い』も改訂されるかもしれません）。　ただし、この定理は研究者・教育者にとって「喉に引っかかった魚の骨」のような存在でした。

その理由は、B=H=K 定理には二つの弱点があったからです。

ひとつはこの定理の証明には行列が使われているので、高校数学から行列が消えてしまった現在では、大学生以上にならないと教えづらいという点です。

大学受験をくぐり抜けてきた学生は、文系だったら「サイン・コサイン」「微分・積分」の公式の暗記だらけの数学にオサラバしたいと思うだろうし、理工学系だったらさっさと工業数学に行きたいだろうし、数学系だったら「解析的な扱いの前段として、まずε=δを使って実数の連続性を証明する」あたりでもがき苦しんでいるはずです。

こうなると、あまり実用性が感じられない「数論」に興味を持ってもらうのは難しいでしょう。まぁ、私はソフトウェア方面の人間なので、たまたま「離散系」とか「数値実験」とかに興味を持ったわけですが。

もうひとつ、B=H=K 定理には、数学的な「泣きどころ」がありました。

B=H=K 定理は、「根に当たる原始ピタゴラス数 {3, 4, 5} を行列ρに変換してから、U・D・A という三種類の 3 × 3 行列を向かって左から掛けてゆくことで、すべての原始ピタゴラス数が一意に表せる」というものでした。もちろん「根に当たる原始ピタゴラス数 {3, 4, 5} を ρ に変換してから ${}^tU$・${}^tA$・${}^tD$ という三種類の 3 × 3 行列を向かって右から掛けてゆくことで、すべての原始ピタゴラス数が一意に表せる」こととと同義でもあります。

すなわち、{3, 4, 5} という「根」にあたる原始ピタゴラス数からすべての原始ピタゴラス数を一意に作りだすことができ、それが三分木という構造をなしているというのが結論です。

ただし、この先が泣きどころです。本当であれば「U・D・A の逆行列の“どれか”を（向かって右から）掛けてゆくことで、任意の原始ピタゴラス数 {e, o, d} から {3, 4, 5} までのルートが辿れる」はずなんですが、「U・D・Aそれぞれの逆行列のうち“どれ”を掛けたら {3, 4, 5} に一歩近づけるか？」は、やってみないと判りません。つまり、「逆操作を簡単に見つける方法が知られていなかった」のが、もうひとつの弱点です。

細矢治夫先生（化学者でありながらエルデーシュ数２だそうです）は、二〇一二年の著書『ポロジカル・インデックス』で「バーニングとホールの理論の大きな泣きどころは、任意の二つの規約ピタゴラス三角形を選んだときに、その両者を結ぶ U・D・A の組合せが存在するかの判定、またもし存在するとしてもその組合せを知る簡単な手立てがないことである」と述べていらっしゃいます。

電算屋としては「平均して３／２回（＝１．５回）なんだから、それほど遅くないじゃないか」という話はあるのですが、この“逆問題”は、「二十一世紀に至っても“完全には” 解決されていない」という歯切れの悪い状態でした。

ところが、P322 と同時代の粘土板であり、P322 とともに「バビロニアの数学粘土板の双璧」といわれる YBC 7289 との比較によって、この問題が行列を使わずに（「連分数を使って」、あるいは「図形的に」）解けてしまいました。

第 4 章：YBC 7289

ふたたび古代バビロニアの数学粘土板に戻ります。P322 とほぼ同時代の粘土板に、 YBC 7289 というものがあります。これです。

「どちらが表でどちらが裏か」という議論はあるのですが、個人的には「バビロニア長方形」が描かれている面が「表」ではないかと考えます。

この「裏」面には六十進数で「1:24:51:10」という値が書かれているのですが、これが２の平方根によく一致します。「この値はどうやって求めたのか？」というのは定かではないのですが、とにかく「ヒトヨヒトヨニヒトミ」くらい合っています（近似値は≒1.414212963）。

ここで、P322 の第１行を見てください。{119, 120, 169} という原始ピタゴラス数が書いてありますよね？　これは「P322 に記載されているのが原始バビロニア長方形であるとして、そのうち正方形に長方形の短辺と長辺と対角線の長さ」です。ここで（短辺＋長辺）÷対角線は２の平方根に十分に近いことが期待されるので、試してみましょう。これは ≒1.414201183 となって、けっこう質のいい（「ヒトヨヒトヨニ」までであれば、工学的には充分です。１m 対 0.1 mm ですから）近似値です。

さて。ここからまた二千五百年後の七世紀の初めごろのインドに舞台は移ります。

すでに紹介したように、七世紀インドにブラフマグプタという人がいました。昭和十四年（1934）に著された吉田洋一『零の発見 — 数学の生いたち』（岩波新書）では、

- いかなる数に零を乗じても結果はつねに零であること
- いかなる数に零を加減してもその数の値に変化がおこらないこと

ということを書きのこしたと書かれています。

「０」には

- 空位を表す０。
- 「割ったときの余りが０（割り切れる）」の０。
- 数としての０。
- 「空っぽ」の０。後に別概念とされ、アンドレ・ヴァイユ（André Weil）がスカンジナビア文字「Ø」から採って命名したと自伝に書いている。

という四つの「０」があるわけですが、「『÷０』を考えるとわけのわからないとことが起きる」（そのせいで、０は「悪魔の数字」と云われたそうです）というところまで０を追いつめたのがブラフマグプタであるようです。その人が、原始ピタゴラス数の一般形を書きしるしています。それが、すでに紹介したブラフマグプタの式です。

よって、[1, 3] という [p, q] から、{3, 4, 5} という原始ピタゴラス数が出てきます。このとき 1×3 の長方形を考えて、「長方形の長辺に、一辺が長辺と同じ長さの正方形を二つくっつける」という操作を考えます。一般化すると、「長方形の長辺に、一辺が長辺と同じ長さの正方形を二つくっつける」という操作を考えて、漸化式のように適用することを考えます。そうすると、[p, q] は

[1, 3] ⇒ [3, 7] ⇒ [7, 17] ⇒ [17, 41] ……

という系列（フェルマー系列）をなしていることがわかります（じつは、これは A 操作に対応しています）。

この [p, q] からは

{3, 4, 5}、{21, 20, 29}、{119, 120, 169}、{697, 696, 985}、{4059, 4060, 5741}、{23661, 23660, 33461}、{137903, 137904, 195025}、{803761, 803760, 1136689}、{4684659, 4684660, 6625109}、{27304197, 27304196, 38613965} ……

という「短辺と長辺の長さが１だけ違う原始バビロニア長方形」が出てきます。

この原始バビロニア長方形は正方形に漸近してゆくので、ここから二の平方根の近似値が求められるのでないかと考えました。すなわち YBC 7289 の値は、対角線÷長辺とか対角線÷短辺とかから計算したのではないか。いやいや、書記連中がそんな雑把なことをする訳がない。これは（短辺＋長辺）／対角線に違いない、と考えました。奴らはそういう連中だ（もはや同朋意識を感じています）。

そこで実際に試してみると（表計算ソフトでいけます）、

1.40000000000000、1.41379310344828、1.41420118343195、1.41421319796954、1.41421355164605、1.41421356205732、1.41421356236380、1.41421356237282、1.41421356237309（以下略。これ以上は電卓も表計算ソフトも有効桁数超えています）

となって、6 項めでヒトヨヒトヨニヒトミゴロが出てきます。このとき [99, 239] です。

このとき、「正方形を二個くっつける」のは、「奇数＋奇数」だと偶数になってしまって「奇数」になってしまうからです。「なぜ正方形をくっつけるのか」は、「p と q が互いに素である」という性質を保存するために必要な条件だからで、「ユークリッドのアルゴリズムの逆回し」だからです。

ペル数列

このとき、フェルマー系列の種になる [p, q] を [m, n] で表したらどうなるでしょうか。

$m = (q - p) / 2$

$n = (p + q) / 2$

なので、

[1, 2]、[2, 5]、[5, 12]、[12, 29]、[29, 70]、[70, 169]、[169, 408]、[408, 985]、[985, 2378]、[2378, 5741] ……

といった数が出てきます。ちなみに [] で囲むのは細矢治夫先生が『三角形の七不思議』でやっています。ここに出てくる数値を大きさの順に並べると、　1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, 985, 2378, 5741 ……

となって、これはペル数というものになります。

すなわち、

$B_0 = 1$

$B_1 = 2$

として、

$B_n = 2B_{n-1} + B_{n-2}$

です。

こうなると p と q でやったらどうなるかとか、U と D だと m, n はどうなるかとか、いろいろと寄り道したくなります。で、やってみると U だと

[1, 2]、[2, 3]、[3, 4]、[4, 5]、[5, 6]、[6, 7]、[7, 8]、[8, 9]、[9, 10]、[10, 11] ……

から

1, 2, 3, 4, 5, 6. 7, 8, 9, 10, 11 ……
が出て、 D だと
[1, 3]、[3, 5]、[5, 7]、[7, 9]、[9, 11]、[11, 13]、[13, 15]、[15, 17]、[17, 19]、[19, 21] ……
から
1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21 ……
が出てきます。

ところでペル数はバースカラ2世がディオファントス方程式の解法の研究中の 1150 年に発見したそうです。

ちなみに、同じことを [p, q] でどうなるかというと、
[1, 3]、[3, 7]、[7, 17]、[17, 41]、[41, 99]、[99, 239]、[239, 577]、[577, 1393]、[1393, 3363]、[3363, 8119] ……
から
1, 3, 7, 17, 41, 99, 239, 577, 1393, 3363, 8119 ……
が出てくるのですが、なんかしらこの数列は $\tan^{-1}()$ かなんかの計算のときに見かけた気はしますが、これを追いかけていると話が終わらなくなるので省略します。

前章で「原始ピタゴラス数は三分木構造をなす」というB=H=K定理の話が出ました。つまり{3, 4, 5}（本当は転置行列にするのですが）という「最小の原始ピタゴラス数」に「U・D・A」という行列のいずれかを掛けてゆくと、原始ピタゴラス数は三椏（ミツマタ）の木のように、各節から三本づつ枝を伸ばしてゆくわけです。原始ピタゴラス数は原始バビロニア長方形と一意に対応しているので、その枝のうち一本の枝の正体は割れたわけです。じつはこの枝、行列Aと対応しています。三角形の合同条件は「三辺合同」「二辺挟角」「二角挟辺」なので、直角を挟む辺二辺が決まればいいわけで、自由度は二です。だったら「原始ピタゴラス数」の世界から [m, n] とか [p, q] の世界に行って、U・D・Aに相当する操作を行なってから帰ってくればいいじゃん、という話です。「急がば廻れ」ですな。

じゃあ、残りの二本はどうなっているのか。こうなると、「プログラムを=書いてパソコンで走らせて、試行錯誤で見つけてやろう」という気になります。だいたい古代バビロニアの書記（行政官です）は、これを手計算で見つけちゃったんだから、パソコンとインターネットが普及した現代人の我々が、書記に後れを取って（というか、すでに三千八百年は遅れを取っているのですが）どうする？という話です。

{o(odd), e(even), d(diagonal)} として、

ブラマグプタの公式

- {o, e, d} ＝ {pq, $(q^2 - p^2) / 2$, $(p^{2 + q^2) / 2\} = q^2}$
- （ただし p と q は互いに素な奇数であり、 $p < q$）

$e + d = q^2$
$\therefore q = \sqrt{q^2}$
$p = o / 2$

であらわせます。

第５章：U・A・D という三本の枝

最小の(p, q) は (1, 3) です。これを「根」とします。そして三本の枝のうちの二本は、

- 長方形の短辺に、一辺が短辺と同じ長さの正方形を二つくっつける。（U の枝を延ばす操作）
- 長方形の長辺に、一辺が長辺と同じ長さの正方形を二つくっつける。（A の枝を延ばす操作）

が出てきます。ただ、これって「B=H=K 定理」によれば三方に枝分かれしているはずなので、もう一つの D 系列（プラトン系列）の枝があるはずです。

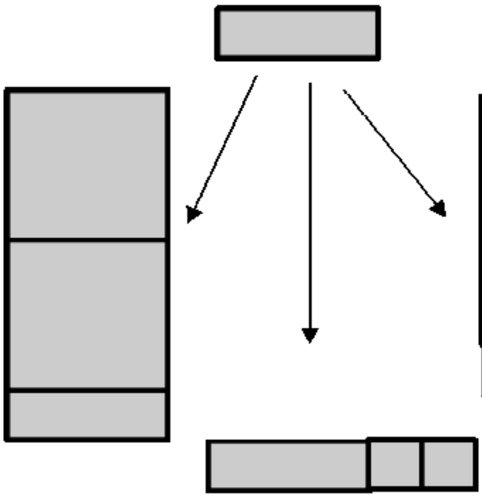
表計算ソフトや一般的なプログラミング言語だと試行錯誤しようと思っても手間が減りません。そこで、文房具屋に行って、 5 mm方眼紙（「設計用紙」という別名があります。A4 と B4 があります）を買ってくるのが早道です。要するに、手描きです。粘土板やパピルスより便利だと思えば腹も立ちません。

そう考えてあれこれやってみると、「互いに素で $p < q$ の奇数 (p, q)」の中に、U 操作 とA 操作だけでは出てこないものがあります。たとえば (3, 5) です。U 操作も A 操作も操作を行うと必ず面積が大きくなるので、(1, 3)から(3, 7)（A 操作）を考えると、 (3, 5)の面積の 15 (1, 3) から(1, 5)（U 操作）はともかく、どうしても U と A だけでは (3, 5) を素通りしてしまいます。

そこで考えました。そういえば 3 × 3 の正方形を二つくっつけた 3 × 6 から 1 × 3 を切りとれば 3 × 5 なので、面積は大きくなり、辺長も奇数×奇数です。ひょっとしたら
「一辺が長辺と同じ長さの正方形二つから、元の長方形を取り去る。」
が三本めの枝に相当するのではないか。つまり、

- 長方形の短辺に、一辺が短辺と同じ長さの正方形を二つくっつける。
- 長方形の長辺に、一辺が長辺と同じ長さの正方形を二つくっつける。
- 一辺の長さが長辺に等しい正方形を二つくっつけ、そこから元の長方形を引く。

ということになりました。図にすると、こうなります。



ところが、これがのちのち話をややこしくしてくれます。

プログラマの視点

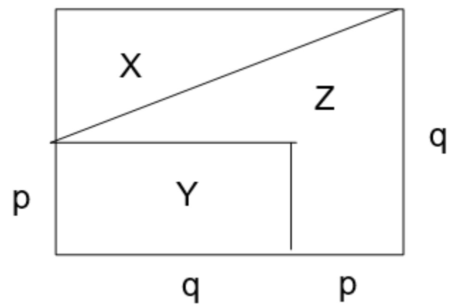
古代バビロニアにはパソコンもプログラミング言語もなかったので、P322 の計算にはけっこうな手間がかかったと思います。おそらく一人ではないでしょう。こうなると、「誰がアルゴリズムを考案し、誰がどういう形で計算チームに計算方法を伝達したのか？」という疑問があります。「プリンプトン３２２は公文書の書式に即しているので、国家プロジェクトの一環だった」というのも説得力が不足しています。第 11 行と第 15 行で、「約数に 1 から 5 までの素因数が含まれている」「約数に 1 から１０までの素因数が含まれている」といった「お遊び」をやっているのがその証拠です。

第 11 行の長辺である 60 の約数には、{1, 2, 3, 4, 5, 6} が含まれています。第 15 行の面積である 56 × 90 = 5,040 の約数には、{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} が含まれています。それだけの精神的な余裕があったようです。

そういう精神的余裕のあるチームを率いるというのは、チームリーダーが「チームのポリシーを理解させ、チームのメンバーに『自分はいま、どこを目指すべきか』という目標を与え、それを訓練によって身体化し、同時にメンバーのモチベーションを維持する」ための訓練であったのかもしれません。

動機はとこかく、実際に計算されたという証拠は残っています。だとすると、「ブラフマグプタの一般式」というのは、どんな形でメンバーに伝えられたのでしょうか。そもそも、当時は「数式」というものがありませんでした。だとすると、簡単に覚えやすい説明図か何かがあったはずです。散々考えたあげく、出てきたのがこの図です。

この点は、「古代バビロニアの書記は、こんな図を考えて、一般式を表現したのではないか？」と考えつきました。



原始バビロニア長方形の {o, e, d} において

奇数辺 o = pq

偶数辺 e = ((q - p)(p + q)) / 2

対角線 d = $(p^2 + q^2)$ / 2

です。

図によると、、長方形 Y の面積は p × q です。この p と q が互いに素であれば、これは原始ピタゴラス数の奇数項 o に一致することが分かります。

また、三角形 X の面積は偶数項 e と一致します。

残った部分の面積 Z は、原始ピタゴラス数{a < b < c} と置いたときの c の値と一致します。

ここまでは P322 に記録された数値の話なのですが、これが「原始ピタゴラス数は三分木構造をなす」という現代の話につながります。

{ e, o, d } ⇔ {Y, X, Z} （の面積）です。これを単位正方形のタイルを敷き詰めた長方形で考えると、p と q が素でなければ p と q の最大公約数の平方のタイルでこの図形を置き換えられて、p’ と q’ に縮退できるというのが見てとれます。「p と q のどちらか一方、あるいは両方が偶数だったら？」という話はありますが、それはそれで現代の数学で説明してください。でないと「X と Y の一方は偶数で一方は奇数」という条件が破れて「原始」の部分で矛盾が起きそうです。とはいえ、「矛盾が起きるから否定」くらいは高校生にも解るので、課題としては適切かもしれません。

なお、こんなことに興味を持っているうちに、細矢治夫先生の「バーニングとホールの定理には泣きどころがある」という文章に行きあたりました。

では、

- 長方形の短辺に、一辺が短辺と同じ長さの正方形を二つくっつける。
- 長方形の長辺に、一辺が長辺と同じ長さの正方形を二つくっつける。
- 一辺の長さが長辺に等しい正方形を二つくっつけ、そこから元の長方形を引く。

という三つの操作の逆操作は何でしょうか。これが、

1 × 3 に到達するまで、「p × q の長方形の p 辺から p × p 正方形二つを切りとって、面積がマイナスになったら符号を反転する」という操作を続ける。

という、「ただ一つの操作」に還元できてしまいます。つまり「末梢」から「根」に至る節点が一意に辿れるわけで、これで B=H=K 定理の完全解決です。三千八百年前に解決済だということの再発見ですから威張れたものではありませんが、溜飲は下がりました。で、この

1 × 3 に到達するまで、「長方形の短辺から正方形二つを切りとって、面積がマイナスになったら符号を反転する」という操作を続ける

は、

正方形に到達するまで、長方形の短辺から正方形を切りとるという操作を続ける。

というユークリッドのアルゴリズムのバリエーションであるといえます。

ちなみに、

- 長方形の短辺に、一辺が短辺と同じ長さの正方形を二つくっつける。
- 長方形の長辺に、一辺が長辺と同じ長さの正方形を二つくっつける。
- 一辺が長辺と同じ長さの正方形を二つくっつけたものから、元の長方形を引く。

という操作は「互いに素であり、偶奇の異なる数 m, n （ただし $m < n$）」にも適用できるので、(1, 2) から始めて

{o, e, d} ＝ $\{n^2 – n2, 2mn, m^2 + n^2\}$

というユークリッド式 [m, n] に適用しても、原始ピタゴラス数は網羅的に求められます。なお、ユークリッドによる原始ピタゴラス数の一般式（偶奇の異なる、互いに素な m, n。ただし $m < n$）とは、

$(q - p) / 2 = m, (p + q) / 2 = n$

という和差の関係になります。これにより原始ピタゴラス数のピタゴラス数の「原点」は、 [1, 3] ⇔ [1, 2] となります。
じつは、[m, n]も[p, q]も、「互いに素」かつ $p < q$ であり $m < n$ なので、

$\frac{q}{p}$ も、 $\frac{n}{m}$ にしろ、分数にすると 既約分数かつ過分数になります。

「だったら、これは連分数によって解決できるのではないか？」と見当をつけました。

連分数による解法

B=H=K 定理の「三次の正方三次列を掛ける」という操作が三つの図形的操作に還元できるというのは把握しましたが、その三つは「正方形を足す」という意味では、ユークリッドの互除法の逆操作であり、いわゆる「フィボナッチ螺旋」の拡張です。

そこで文書化のために、「連分数表示をするとどうなるか？」と考えました。図形的操作になると、どうしても二次元で表現しないといけないので紙面を食うのとイラストを描かねばなりません。それを普通の文書（というか、プログラム）のように行単位で書くにはどうするか。

連分数は、分子がすべて 1 のときは略記法があります。木村 俊一『連分数のふしぎ ― 無理数の発見から超越数まで』（講談社ブルーバックス B1770、2012）によると、φは [1; 1, 1, 1, 1, 1, 1 ……] となり、1+√2 は [2; 2, 2, 2, 2, 2, 2, ……] となります。　これは場所を食わないし行単位で書けます。　ちなみに循環小数にも略記法があります。

1 / 3 は 0.33333 …… ですが、これを0.[3] というふうに、循環部分を [] で括る流儀があります。したがって1 / 7 は 0.[142857] と書けます。

これを組みあわせると、

φ = [1;[1]]
1+√2 = [2;[2]]

ということになって、記述がコンパクトになります。

ともあれ連分数を意識してプログラムのソースコードを整理したところ、「任意のピタゴラス数は、まずユークリッドのアルゴリズムによって求めた最大公約数で割って原始ピタゴラス数に変換して [m, n]の形で表し、根にあたる {3, 4, 5} を ρ とおいて、任意の原始ピタゴラス数 {o, e, c} に「U・A・D に相当する操作」の列に対応する ρ の積に変換するコードが書けました。とはいえ厳密にいうと {o, e, c} は配列であって行列ではなく、「U・A・D に相当する操作」は U・A・D を掛ける操作ではなく[m, n] や [p, q] に対応する原始バビロニア長方形を表す class 定義に相当するプログラムなので 「U とか A とか D とか呼ぶのは間違っている」というのは正当な意見なのですが、プログラマとしては「任意の原始ピタゴラス数 {o, e, c} から {3, 4, 5} に至るルートを示すプログラムを書く」のが仕事なので「“任意の”の範囲を仕様書に書いてくれ」としか言えません。

なお、「B=H=K の生成行列が“網羅的かつ一意に”原始ピタゴラス数を生成することの証明」というのはほとんど知られていないようです。

その原因は、これが“生成行列”だと思われていることにありそうです。 小林 吹代『ピタゴラス数を生み出す行列のはなし』（ベレ出版）なんかはタイトルからして罪作りです。これは本当は一対一の写像です。原論文（少なくともホールのほう）には逆写像が一意に

求まることも含めて示唆されていただろうと思いますが、その具体的な方法について論じられてはいなかったようです。

それはともかく、これが [m, n] または [p, q] の正規連分数展開によって実際に可能であることを示すことにします。ただし、これを数学愛好者の方にワープロ や HTML を使った電子資料にまとめようとすると非常に面倒臭いのが難儀な点です。だいたいワープロには改ページがあるうえに数式を表現するツールが乏しく、HTML だとやたら長くなるうえにソースが長くなります。本当は 日本語 TEX （これで「テフ」とか「テック」と読みます。E は少し下に動かすのが正式です）が便利なんだと思いますが。

そんなわけでプログラムと格闘中なので、以下の記述は正確ではありません。

たとえばここに $\frac{11}{8}$ という分数があったとしましょう。

これは $1+\frac{3}{8}$ であって、 $2-\frac{5}{8}$ です。

$\frac{8}{5}=1+\frac{3}{5}$ なので、 $=2-\frac{2}{5}$ です。

$\frac{5}{2}$ は

$1+\frac{3}{2}$

なので

$2-\frac{1}{2}$

です。これは ρで、すなわち原始ピタゴラス数 {3, 4, 5} です。

$2=\frac{1}{2}$

ここで、、

- $x'=2-\frac{1}{(x)}$
- $x'=2+\frac{1}{(x)}$
- $x'=2+(x)$

としましょう。

１１／８＝*YYA*ρです。

他の値も試してみましょう。

たとえば $\frac{12}{5}$ 。

$\frac{12}{5}$ ＝（２×５＋２）／５＝２＋（２／５）＝２＋１／（５／２）。

５／２＝（２×２＋１）／２＝２＋１／２。

∴$\frac{12}{5}$ ＝A Aρ。

たとえば $\frac{9}{2}$ 。

$\frac{9}{2}$ ＝（２×２＋５）／２＝２＋（５／２）。　５／２＝（２×２＋１）／２＝２＋１／２。

∴$\frac{9}{2}$＝D Aρ。

たとえば１１／４。

１１／４＝（２×４＋３）／４＝２＋１／（４／３）。

４／３＝（２×３－２）／３＝２－（２／３）＝２－１／（３／２）。

３／２＝（２×２－１）／２＝２－１／２。

∴１１／４＝A U Uρ。

この手続きは、任意の原始ピタゴラス数から、

- １）一段下の原始ピタゴラス数と、
- ２）そこに向かう経路（U・A・Dの逆変換のどれにあたるか）

の両方を与えます。で、よく見れば分母分子どちからの数は減っているわけであって、いつかは終了します。終了する点はρです。

これは、“網羅的かつ一意な”ルートが存在することを示していますよね？

原始ピタゴラス数の一般形式は「十分条件であることを示すのは簡単だが、必要条件であることを示すのが困難」だという話がどこかにあったのですが、こちらは図形的証明を用意してあるのですから「同じことを別の言い方をしているだけだからトートロジー」であってなんの問題もありません。「ならば」がないのだから必要条件と十分条件の区別自体があるのかないのかわかりません。

ところが、ひとつ困ったことが起こりました。[p,q] ⇒ ρのルートと [m,n] ⇒ ρのルートが異なってしまうのですよ。おかしいな、と想ったら U と U の転置行列だと、ふたつの操作では U と D の関係が逆であるというのが分かりました。

以下は Java によるソースコードです。

```
public class InverseUAD  {

    public static void main( String [] args ) {
```

```
        inverseUAD( 1359, 4442 );
        inverseUAD( 3083, 5801 );

        /*
        inverseUAD( 2, 3 );
        inverseUAD(2, 5);
        inverseUAD( 1, 4 );

        inverseUAD(3, 5);
        inverseUAD( 3, 7 );
        inverseUAD(1, 5);
*/
//      inverseUAD( 2, 5 );
//      inverseUAD(3, 7);

    }

    /**
     *
     * @param M
     * @param N
     * @return
     */
        public static boolean inverseUAD( int M, int N ) {

                /**
                 * m, n が自然数であるか。
                 * 本当は例外を投げたいところ
                 */

                if (!(0 < M) || !(0 < N)) {
            System.out.println(" M と N の値が自然数ではありません。");
            return false;
        }

        // m < n であるか。
        if (!(M < N)) {
            System.out.println(" M と N の値が 0 < m < n になっていませんでした。");
            int X = M;
            M = N;
            N = X;
            return false;
        }

        /**
         *
         * M と N が互いに素であるか。
         * これは倍率も表示したほうがいいか？
         */
        if (abax.Abaci.gcf(M, N) > 1 ) {
            System.out.println(" M と M の値が 互いに素ではありません。");
            return false;
        }

        /**
         * 偶奇が異なっているか。
         * 互いに素であるかのチェックは通っているので両方偶数ということはない。
         */
        String work;
        if (((N - M) % 2) == 0 ) {
            work = _inverseUAD2(M, N, "");

            System.out.print("[p, q] = [" + M + ", " + N + "] : ");
            System.out.println("{ " + M * N + ", " + ((N * N) - (M * M)) / 2 + ", " +  (((M * M) + (N * N)) / 2) +  " } = " + work);
        } else {
            work = _inverseUAD(M,  N, "");

            System.out.print("[m, n] = [" + M + ", " + N + "] : ");
            System.out.println("{ " + ((N * N) - (M * M)) + ", " + (2 * M * N) + ", " + ((N * N) + (M * M)) + " } = " +  work);
        }

        return true;
    }


        /**
         * 縦ベクトル  {3.4.5} に,、3 × 3 行列 U/A/D を向かって左から掛ける。
         * m, n は偶奇が異なり、m < n かつ互いに素である。
         * @param m
     * @param n
     * @return
         */
    private static String _inverseUAD( int m, int n, String str) {
        if ((m == 1) && (n == 2)) {
        //    System.out.println("ρ");
                System.out.println("ρ: [" + m + ", " + n + "]");
            return str + "ρ";
        }

        // D:Down : 3m < n
        if (n > (m + m + m)) {
                System.out.println("D: [" + m + ", " + n + "]");
            return _inverseUAD(m, n - (m + m), str + "D");
        }
```

```
        // A:Across : 2m < n

        if (n > (m + m)) {
                System.out.println("A: [" + m + ", " + n + "]");
            return _inverseUAD(n - (m + m), m, str + "A");
        }

        // U:Up : m < n < 2m
        System.out.println("U: [" + m + ", " + n + "]");
        return _inverseUAD((m + m) - n, m,  str + "U");
    }


    /**
     * 横ベクトル  {3.4.5}  に,3 × 3 行列（U/A/D）の）転置行列を向かって右から掛ける。
         * p, q はともに奇数であり、p < q かつ互いに素である。
     * @param p
     * @param q
     * @return
         */
     private static String _inverseUAD2( int p, int q , String str) {

        // ρ
         if ((p == 1) && (q == 3)) {
             //    System.out.println("ρ");

                System.out.println("ρ: [" + p + ", " + q + "]");
                return str + "ρ";
         }

         // U:Up : p < q < 2p
        if ((p + p + p) < q) {
                System.out.println("U: [" + p + ", " + q + "]");
            return _inverseUAD2(p, q - (p + p), "U" + str) ;
        }

        // A:Across : 2 < q
        if (q > (p + p)) {
        //    System.out.print("A");
                System.out.println("A: [" + p + ", " + q + "]");

            return _inverseUAD2(q - (p + p), p, "A" + str);
        }

        // D:Down : 3p < q
        //System.out.print("U");
        System.out.println("D: [" + p + ", " + q + "]");
        return _inverseUAD2((p + p) - q, p, "D" + str);
    }
}
```

これで、

(1359, 4442) = { 17884483, 12073356, 21578245 } = DUUUAAUAUUDAρ

なんていうのも求められます。

著者の外部サイト『BackLog』（http://animaleconomicus.blog106.fc2.com/blog-entry-2599.html）にそのまま掲載されています。

計算量

「(0 < p < q < 180)である奇数の対 [p, q]」は 4,005 個あります（式を立てて求めたわけではありません。パソコンに数えてもらいました）。「(0 < p < q < 180)である奇数の対 [p, q] の中から、p と q が互いに素であるものを、ユークリッドの互除法を使わずに求める」方法は分かったので、少し計算量が節約できるわけですが、それでも[p, q] は 3,283 個あります。

つぎに、そこから得た原始ピタゴラス数のうち、{o, e, d} のうち o と e のどちらが大きいかを判定して {a, b, c}（a < b < c）にする作業があります。これはかなり面倒臭そうです。

この作業の先に「b が正則数であるかどうか」と「1 < 形状比AR < φ」のチェックを入れて条件に合わなければハネるという操作があります。

形状比ARは「b ÷ a」であり、「1 < AR < φ」 の比較は「分数の大小比較」になってしまうので、「大小関係の比較なら、分数ではなく小数でやったほうが楽なのではないか」ということで、小数表現の整列キーを生成したようです。ただ、こうなると目が眩むような手間数になるわけで、分数のまま「一以上二以下」あたりまで絞り込んでから小数に直したのではないかと考えます。

こんなものは現代のパソコンなら一瞬未満（「一瞬」は佛教用語で、約 0.36 秒ほどです）で片付くのですが、これを手計算でやるのはさぞかし大変だったろうなと思います。

書記の底力

古代バビロニアの書記は、

- 少なくとも加法・減法・乗法に長けており、（なにせ P322 を計算しているのですから）
- 「三平方の定理」を理解しており、（P322 の記述により明らか）
- 遠山啓さんの水道方式における「タイルのシェーマ」にあたる単位正方形を理解しており、（当時の粘土板により明らか）
- 「互いに素」という概念を理解していて、
- ユークリッドのアルゴリズムを応用できるほど理解していており、
- 「黄金比」という概念にも到達しており、
- 「連分数」「漸化式」という概念を理解しており、

- 「素因数分解」という概念を理解していて、
- その結果から約数を数え上げることができた。（P322 の 11行の {45, 60, 75} と 15行の {56, 90, 103} の値から明らか）

わけです。
　ひとつ悩ましいのは「ユークリッドのアルゴリズム」とはいうものの、ユークリッド（紀元前３世紀？）も「アルゴリズム」の語源となったアル・フワリーズミー（八世紀～九世紀。ブラフマグプタより後です）も生まれていませんが）も三千八百年前には生まれていなかったという点です。
　なお、古代バビロニアには、「一般の数の平方根を求めるという「開平方」は発見されてはいなかったのではないか」という憶測があります。そこで「バビロニアの開平法」と呼べるような素朴な方法があっただろうという話もありますが、このあたりは謎です。
　ただ、

- 原始バビロニア長方形のどちらかの辺長が奇数で、そうでない辺長は偶数。ただし長辺と短辺という区分は別
- 偶数辺は 4 で割りきれる。
- 対角線長は必ず奇数。
- 偶数辺長×奇数辺長×対角線長は、必ず六十の倍数。

ということは理解されていたようであり、
　　・「相異なる任意の奇数 x, y（x < y） について、(y - x)×(x + y) は 8 で割りきれる。などということも（少なくとも経験的には）知っていた。
と思います。
　ただ、このあたりになると現代の高校生も「証明せよ」と言わたら けっこう手上げになりそうです。
　これを「これらを中学生にも理解できるように説明せよ」というのは、教育上は面白い課題ではないかと考えます。

東洋と西洋の違い

　さて。ここからが問題です。

- 長方形の短辺に、一辺が短辺と同じ長さの正方形を二つくっつける。
- 長方形の長辺に、一辺が長辺と同じ長さの正方形を二つくっつける。
- 一辺の長さが長辺に等しい正方形を二つくっつけ、そこから元の長方形を引く。

という操作によって、[p, q] ⇔ ρ、[m, n] ⇔ ρ、というルートが求められるというのは分かりました。ところが、これが [p, q] と [m, n] を相手にしてみると、結果が一致しません。「何じゃこりゃあ！」 （声は松田 優作）という気分でした。
　そうなると、試行錯誤です。いろいろやってみると、A 操作 は ^tA と対応しているのですが、U 操作は ^tD と、D 操作は ^tU と、対応していました。
　「これは見つけられんわ」と思いました。バビロニアの書記による、「図形的な対応」まで追いかけた甲斐があるというものです。
　算額にして神田明神に奉納したいところですが、考えたら P322 も書記の神ナブー様に捧げた算額なのかもしれないと思いました。
（了）（しまだ まさを／島田 正雄）

附録１：原始ピタゴラス数の諸性質

　原始ピタゴラス数の基本的な性質には、以下のようなものがあります。

- 原始ピタゴラス数は無数に存在する。
- 直角二等辺三角形の辺長は原始ピタゴラス数ではない。
- 最小（面積が最小、かつ周長が最小）の原始ピタゴラス数は、{3, 4, 5} である。これはユークリッドの公式の [1, 2]、ブラフマグプタの公式の [1, 3] に対応する。
- {o, e, d} のうち、o と d は奇数であり、e は偶数である。
- e は 4 の倍数である。
- o × e × d 六十の倍数である。
- 適当な範囲内（たとえば斜辺が 100 以下とか）において、素朴な方法、一般形から求める方法、B=H=K 定理の生成行列 U, A, D による方法で、解集合が一致すること。（済）

　このうち、「原始ピタゴラス数は無数に存在する」は、たとえばブラフマグプタの式は「互いに素である奇数 p と q（ただし p < q）が無数に存在することから謂えます。
また、「直角二等辺三角形の辺長は原始ピタゴラス数ではない」は、「斜辺 Z は無理数（２の平方根の自然数倍）であって自然数ではない」ことから謂えます。　ただ、「{o, e, d} のうち、o と d は奇数であり、e は偶数である。」と「e は 4 の倍数である」と「o × e × d は六十の倍数である。」はまとめて説明したほうが理解しやすそうなので、そうします。
　なお、「背理法被害者の会」の理科大の安倍先生によれば「研究者になる前に背理法を覚えると脳が腐る」そうなので、背理法を使わずに場合分けを使います。　また、原始バビロニア長方形の [p, q] で考えます。
　なお、剰余系が出てきます。

　まず、ブラフマグプタの式より o = pq は「奇数×奇数」なので o は奇数です。
　e が 4 の倍数であるためには $q^2 - p^2$ は 8 の倍数である必要があります。
　p も q も奇数なので、任意の奇数 Ω は mod 8 で考えると、{1, 3, 5, 7} のどれかになります。そこでこの自乗は {1, 9 = 1, 25 = 1, 49 = 1} となります。つまりどうやっても 1 になります。そうすると $q^2 - p^2 = 1 - 1 = 0$ となって、８で割切れるということになります。
　同じようにこれを d で考えると、こちらは 1 + 1 = 2 となって、これを 2 で割ると 1 になるので、「d は 4 で割って 1 余る奇数

である」ということが謂えます。
すなわち、

- o は奇数
- e は 4 の倍数
- d は 4 で割って 1 余る数

が謂えます。

　つぎは「o × e × d は六十の倍数である。」です。e が 4 の倍数なので、あとは o, e, d のいずれかに 3 と 5 が入っていることを示せばいいわけですが、このとき「3 および 5 が o, e, d のうちいずれか一つにだけ入っている」という条件がつきます。でないと「原始」になりませんから。
　ともあれ 3 からゆきましょう。
　「$X^2 + Y^2 = X^2$」は前提です。mod 3 で考えると {0, 1, 2}なので、二乗は{0, 1, 1}となり、{0, 1}です。これを 「$X^2 + Y^2 = X^2$」に当てはめると、0 が入らないのは{X, Y, Z} = {1, 1, 2} しかないのですが、二乗が 2 (mod 3) になる奇数はありません。したがって {0, 1, 1} か {1, 0, 1} となります。「そういえば d が 3 で割切れる例を見たことがないなぁ」と思いました。
　つぎは 5 です。{1, 2, 3, 4} を考えると、二乗は {1, 4, 4, 1} で {1, 4}になります。そうすると {X, Y, Z} は「1 + 4 = 0」「4 + 1 = 0」しかないので、「X か Y のどっちかが 5 の倍数でなければ、Z が 5 の倍数になる。ということが謂えます。

人名索引

- ハンムラビ王(BC1810 - BC1750)
- ピタゴラス(Pythagoras。BC582 - BC496）
- プラトン(BC427 - BC347)
- エウクレイデス(紀元前三世紀?)
- ディオファントス(アレクサンドリアのディオファントス。三世紀初頭 - 三世紀末)
- ブラフマグプタ(598 – 665?)
- アル＝フワリズミー(アブー・アブドゥッラー・ムハンマド・イブン・ムーサー・アル＝フワーリズミー。九世紀前半)
- バースカラ二世(バースカラ。1114 - 1185）
- フィボナッチ（レオナルド・ダ・ピサ。「フィボナッチ」は「ボナッチの息子」の意。1170 - 1250）
- ピエール・ド・フェルマー(1607 - 1665)
- オットー・ノイゲバウアー(1899 - 1990)
- アンドレ・ヴァイユ(1906 - 1998)
-

用語索引

- 正則数
- フィボナッチ数列
- 全単射

参考文献

- 吉田洋一『零の発見 — 数学の生いたち』（岩波新書。1934）
- オットー・ノイゲバウアー著／矢野 道雄、斎藤 潔訳『古代の精密科学』（恒星社厚生閣、1990）
- R・P・ファインマン著／大貫昌子訳『「御冗談でしょう、ファインマンさん」— ノーベル賞物理学者の自伝 』
- 小林 吹代『ピタゴラス数を生み出す行列のはなし』（2008）
- 細矢 治夫『ポロジカル・インデックス』（2012）

コード

```
/**
 * 古代バビロニアの数学粘土板、Plimpton 322 の検証。
 * 直角二等辺三角形。
 * 二つの、互いに素である奇数 p,q （ただし、 p < q ） から
 * ユークリッドの一般式によって生成された整直角三角形のうち、
 * 以下の三条件を満たすものを探す。
 * １） q <= 180 の範囲において
 * ２）長辺／斜辺の長さが  1.0 と 黄金比の間にあり、
 * ３）長辺の長さが調和数のもの
 *  2014/12/08。
 * @author Mr.Moto
 */

import java.util.TreeMap;
import java.util.Iterator;

public class Plimpton322 {

  public static void main( String [] args ) {
      plipton_322();
```

```
    }

  /**
   *  二つの奇数 (p, q) で定義される原始ピタゴラス数の生成。
   * 自然数 p と q はともに奇数で、0 < p < q で、かつ互いに素である。
   * 探索範囲は q < 180 とする。
   */
    public static void plipton_322() {
      final int max = 180;
      TreeMap <Double, RightAngledTriangle> tm = new TreeMap <Double, RightAngledTriangle>();

      /**
       * ユークリッドの一般形。
       * 自然数 p と q はともに奇数で、0 < p < q であり、かつ互いに素である。
       */
      for (int p = 1; p < max; p += 2) {
           for (int q = p + 2; q <= max; q += 2) {
              if (gcm(p, q) != 1) continue;
           RightAngledTriangle rat = getTriangle(p, q);
           if (rat == null) continue;
           Double pt = new Double((double)rat.long_leg / (double)rat.short_leg);
           tm.put(pt, rat);
           }
      }

        //TreeMapの先頭から順番に画面表示する

        Iterator<Double> iter = tm.keySet().iterator();
        int n = 0;
        System.out.println(
           " 長辺  | 短辺  | 斜辺 | 番号 | (形状比) |( p, q )|");

        while (iter.hasNext()) {
            Double ptkey = iter.next();
            RightAngledTriangle rat = (RightAngledTriangle)tm.get(ptkey);
            n += 1;
            System.out.println(
               n + ": " +
               "( "  + rat.long_leg + ", " + rat.short_leg + ", " +
               rat.hypotenus + " ) : " + n +
               " : ( " + ptkey.doubleValue() +
               " ) : ( p = " + rat.p + ", q = " + rat.q + ")");
        }
    }

    /**
     * 探索範囲は 長辺／短辺の比が 1.0 （直角二等辺三角形） と
     * 黄金比の間で、長辺が調和数のもの。
     * @param p
     * @param q
     * @return
     */
    public static RightAngledTriangle getTriangle( int p, int q ) {
      final double PHI = (1.0d + Math.sqrt(5.0d)) / 2.0d;  // 黄金比

      RightAngledTriangle rat = RightAngledTriangle.createByEukleides(p, q);
      if (rat == null) return null;
   if (!harmonic(rat.long_leg)) return null;
      double ar = (double)rat.long_leg / (double)rat.short_leg;
       if ((ar < = 1.0d) || (PHI  < = ar))  return null;
       return rat;
    }

    /**
     * 最大公約数を求める。
     * @param m 引数 m
     * @param n 引数 n
     * @return  最大公約数。
     */
    public static int gcm( int m, int n ) {
      if ((m < = 0) || (n  < = 0)) return 1;
      if (n  <  m) return _gcm(n, m);
       return _gcm(m, n);
    }

    private static int _gcm(int m, int n) {
      if (m == n) return m;
      int 余り = n % m;
      if (余り == 0) return m;
   return _gcm(余り, m);
    }

    /**
     * 調和数かどうかのチェック。
     * @param m
     * @return 調和数であるとき真。
     */
    public static boolean harmonic( int m ) {
      int w = m;
      while ((w % 2) == 0) {
       w /= 2;
      }
      while ((w % 3) == 0) {
       w /= 3;
```

```
      }
      while ((w % 5) == 0) {
       w /= 5;
      }
       return (w == 1);
    }
}
```

島田 正雄
生まれは大田区大森の町工場街。
日本大学航空宇宙工学科修了。高校生のころからの電算屋。「業務」と「システム」を繋ぐことに興味がある。
とはいえ自分自身の興味のためにプログラムを書くのも好き。これも「仕事」という顧客さんと技術屋のあいだの空気の中で泳ぐための水練だと思っている。「人間とコンピュータの関係」とかいった大げさなことではなく、「役に立つパソコン」を追求しているうちに、日本語処理・数学・歴史（数学史・技術史）などに関心を持ち、教育について興味を持っている。
現代人は「顔が見える個人」ではあるはずだが、古代バビロニアの書記の方々とは友人になれるのではないかと思っている。