

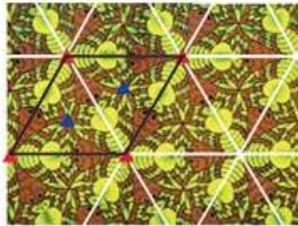
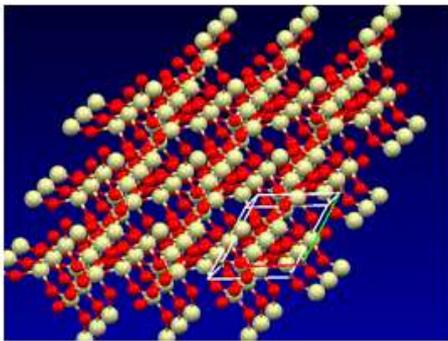
ジャーミイの模様の幾何学～美しいものには理由がある～

東京ジャーミイ特別公開文化講座(11月16日), 谷克彦(NPO 法人数学月間の会)

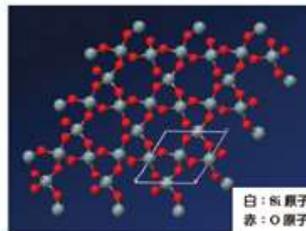
■結晶は周期的な世界 → 平面群

周期的な世界＝結晶空間 (例) 水晶 SiO₂ 結晶

(周期的な壁紙模様の対称性)
平面群は17種類



|| p31m



白: Si 原子
赤: O 原子

p31m は石英 (quartz) の結晶構造で見られます。

結晶は単位胞を積み上げてできたブロック細工のようなもので、周期的な内部構造です。図は水晶の例です。水晶の6角柱の方向から見た投影図と M.C.Escher のこの版画作品は同じ対称性(平面群 $p31m$)です。

系の秩序(対称性)は、対称操作[系全体を動かしたとき、系の初期位置と全く重なるような操作]の集合で記述します。対称操作には、並進、対称心、鏡映、回転などがあり、これらの対称操作(群の元という)の組み合わせが作る“群”という代数系[集合の元間の

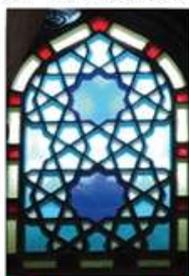
演算が、群の定義(注)を満たす集合]で分類できます。壁紙を記述する平面群は17種類あり、ジャーミイの繰り返し模様もこれらのどれかに分類できます。

注)群の定義:

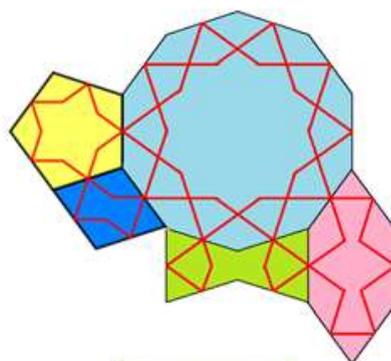
1. 集合 G の任意の2つの元 a, b の積 $a \cdot b$ は集合 G に属す。→集合は閉じている
2. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ →結合の法則
3. 任意の要素 a に対して、 $a \cdot e = e \cdot a$ となる e が集合 G の中にある。→単位元 e の存在
4. 任意の要素 a に対して $x \cdot a = a \cdot x = e$ となる x が集合 G の中にある。→逆元 x の存在

■イスラームの模様の作り方 → テッセレーション

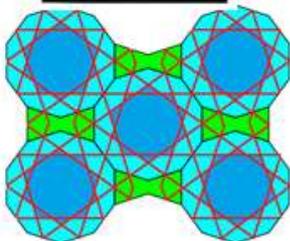
ジャーミイの窓の模様



Girihタイル



5つのGirihタイルを組み合わせて平面を埋める



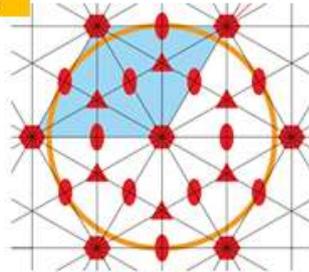
イスラーム建築に使われている美しい模様は、コンパスと定規だけで厳密に作図できますが、1200年までに、5種類の Girih タイル[縁に模様のある等辺多角形タイル]を用いて、パズルのように平面を埋めて美しい複雑なデザインを作る手法が確立しました。

この方法は平面を多角形タイルで分割するテッセレーションの手法と同じです。イランの Darb-i Imam 寺院(1453)の壁には、その500年後にヨーロッパで発見される Penrose タイリング[自分の中に自分と同じパターンが

繰り返される]と同様なパターンがすでに見られることを Peter Lu と Paul Steinhardt が報告しています。

■イスラーム模様の特徴 → 亜群

第8章 東京ジャーミイ



イスラーム模様の特徴は、局所的に
対称性の高い星型ロゼットがちりばめ
られていることです。平面群で存在が
許される回転対称は、2, 3, 4, 6 回
に限られ、5 回や、7 回以上の回転対称
は周期性と両立できません。その理
由は正 5 角形のタイルや正 7 角形以
上のタイルは平面を隙間なく埋めるこ
とができないからです。

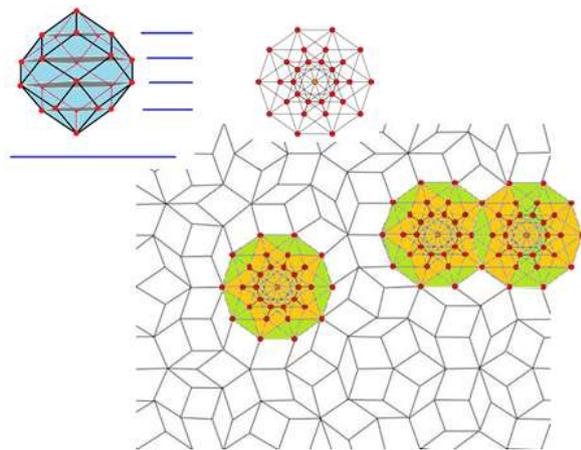
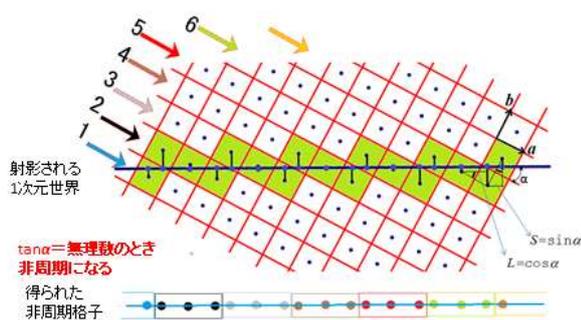
イスラームの繰り返し模様中に、高い
対称性(9 回とか 10 回とか 12 回など)
のロゼットをよく見かけますが、これら
の対称性は各ロゼットの内部だけで、

全域を支配することはあり得ません。そのため、対称性が高そうに見えても、平面群(17 種類ある)のどれ
かに割り当てざるを得ないのです。

イスラームの特徴的な模様を、平面群で分類するのではなく、もっときめ細かい対称性の記述はできない
ものでしょうか？ 群ではなく、亜群(1926)や混群という代数系などが提案されていますが、その発展が
行き詰っているのは残念なことです。

■高次元の周期的な世界から 2 次元の世界への影 → 高次元格子からの射影

2次元周期的な世界の1次元世界への影は、
周期が乱れることもある



イスラーム模様を高次元の周期的空間からの 2 次元平面への影であると解釈する方法もあります。

周期性のない Penrose のタイル張り(1976)を、このような方法で作ることもできます。

左図は、周期的な 2 次元世界から 1 次元世界への射影で、2 次元世界で存在した周期性が失われる
事例です。5 次元の周期的空間 [3 次元や 2 次元の周期的空間には存在できない 5 回対称軸が存在
可能] を、2 次元平面に射影すると、5 回対称のロゼットを作れますが、5 回対称性はロゼットの
内部だけで 2 次元平面での周期性は壊れます。イスラーム模様がちりばめられた高い対称性の星型
ロゼット(高次元空間からの影)を見ていると、高次元の宇宙の中に自分が存在する世界があるこ
とを実感し、不思議な気分になります。