ピタゴラス数について（その４）　　　竹内淳実０９．６．２５

二つの数を共有するピタゴラス数は存在するか？すなわちＰ(A,B,C）に対して P(C,B.D)となる整数 D は存在するか？

この解が存在しなければ、フェルマーの定理のうち、A^4＋B^4=C^4の解は存在しないこととなる。

Ｐ（ＡＢＣ）　P(ＣＢＤ)では、Ｂがその位置を変えないので、Ｂによりピタゴラス数を求める。

B は偶数で、B＝$B_1B_2B_3B_4$２^n　で表せる。ｎ≧２である。$B_1B_2B_3B_4$・・は奇数で互いに素とする。B を含むピタゴラス数は、素数の組み合わせと、２と２$^{2n-1}$との組みあわせにより定まる。（$B_1{}^2B_2{}^2$ｘ２$^{2n-1}$）＞（$B_3{}^2B_4{}^2$ｘ２）であれば

P(A,B,C)では　C＋A＝（$B_1{}^2B_2{}^2$ｘ２$^{2n-1}$）、　C―A=（$B_3{}^2B_4{}^2$ｘ２）であり、したがって、A=[（$B_1{}^2B_2{}^2$ｘ２$^{2n-1}$）―（$B_3{}^2B_4{}^2$ｘ２）]／２

　　C=[（$B_1{}^2B_2{}^2$ｘ２$^{2n-1}$）＋（$B_3{}^2B_4{}^2$ｘ２）]／２　となる。

以下算出例をあげる。

４^2＝８ｘ２　（３，４，５）

８^2＝３２ｘ２　（１５，８．１７）

１２^2＝（３^{2}ｘ２）ｘ８＝（３^{2}ｘ８）ｘ２（５，**１２**，１３)（３５、**１２**，３７）

１６^2＝１２８ｘ２＝（６３，１６，６５）

２０^2＝５０ｘ８＝２００ｘ２（２１，**２０**，２９)（９９，**２０**，１０１）

２４^2＝３２ｘ１８＝２８８ｘ２（７，**２４**，２５)（１４３，**２４**，１４５）

２８^2＝９８ｘ８＝３９２ｘ２（４５，２８，５３)（１９５，２８，１９７）

３２^2＝５１２ｘ２　（２５５，３２，２５７）

３６^2＝１６２ｘ８＝６４８ｘ２＝（７７，**３６**，８５)（３２３，**３６**，３２５）

６０^2＝（５^{2}ｘ８）（３^{2}ｘ２）＝（３^{2}ｘ８）（５^{2}ｘ２）＝（１５^{2}ｘ２）ｘ８＝（１５^{2}ｘ８）ｘ２　　　　（９１，**６０**，１０９)（１１，**６０**，６１）（２２１，**６０**，２２９)（８９９，**６０**，９０１）

８４^2＝（７^{2}ｘ８）(３^{2}ｘ２)=（３^{2}ｘ８）（７^{2}ｘ２）＝（２１^{2}ｘ８）ｘ２＝（２１^{2}ｘ２）ｘ８　　　　（１８７，**８４**，２０５)（１３，**８４**，８５）（１７６３，**８４**，１７６５)（４３７，**８４**，４４５）

４２０^2＝（１５^{2}ｘ８）(７^{2}ｘ２)=（７^{2}ｘ８）（１５^{2}ｘ２）＝（２１^{2}ｘ８）（５^{2}ｘ２）＝（５^{2}ｘ８）（２１^{2}ｘ２）＝（３５^{2}ｘ８）（３^{2}ｘ２）＝（３^{2}ｘ８）（３５^{2}ｘ２）＝（１０５^{2}ｘ８）ｘ２＝（１０５^{2}ｘ２）ｘ８

（851，420，949）（29，420，421）（1739，420，1789）（341，420，541）（4891，420，4909）（1189，420，1261）（44099，420，44101）（11021，420，11029）

さて、本題に戻る。　P(A,B,C)に対して、P(C,B,D)は存在するか？式では
上記　$C=[(B_1{}^2B_2{}^2 \times 2^{2n-1}) + (B_3{}^2B_4{}^2 \times 2)]/2$　に対して、
同一数　$C=[(B_1{}^2B_3{}^2 \times 2^{2n-1}) - (B_2{}^2B_4{}^2 \times 2)]/2$ が存在するか？
この式を整理すると

$$[B_1{}^2(B_2{}^2-B_3{}^2) \times 2^{2n-1}]=[(B_2{}^2-B_3{}^2)B_4{}^2 \times 2]$$

$B_1{}^2 \times 2^{2n-1}=B_4{}^2 \times 2$　となり、B_1　B_4 共に奇数、互いに素であるという前提と矛盾する。$B_1=1$、　$B_4=2^{n-1}$　として、再度C式に代入する。

$$C=[(B_2{}^2 \times 2^{2n-1}) + (B_3{}^2\,2^{2n-2} \times 2)]/2$$
$$=[(B_2{}^2 \times 2^2) + (B_3{}^2 \times 2)]/2$$

また　$C=[(B_3{}^2 \times 2^{2n-1}) - (B_2{}^2\,2^{2n-2} \times 2)]/2$

$$=[(B_3{}^2 \times 2^2) - (B_2{}^2 \times 2)]/2$$

したがって　$6B_2{}^2=2B_3{}^2$　すなわち　$3B_2{}^2=B_3{}^2$
$B_2=1$　とすれば、$B_3=\sqrt{3}$
改めて $B=\sqrt{2}\sqrt{3}\cdot 2$　$B^2=2 \times 3 \times 4=24$ とすると
Ｐ（１、Ｂ、５）　とＰ（５、Ｂ。７）が得られた。

結論　Ｐ(A,B,C）と　P(C,B.D)とに共通な整数Ｃ、ＤはＢが整数であれば存在しない。$B=\sqrt{24}$　無理数であれば、A=1,　Ｃ＝５、Ｄ＝７が得られる。