細矢治夫著『三角形の七不思議──単純だけど，奥が深い』

新書判，182ページ，本体800円，ブルーバックスB-1823，講談社，2013年7月，ISBN978-4-06-257823-3

『三角形の七不思議』というしゃれた表題の本書は，以下の7つの章から構成される．

1. 正三角形の不思議な性質
2. 不等辺三角形の不思議な性質
3. ピタゴラスの三角形
4. ヘロンの三角形
5. 三角定規で遊ぶ
6. アイゼンシュタインの三角形
7. 二等辺三角形と黄金三角形

三角形には2次元のエッセンスが濃縮しており，不思議な性質は山ほどである．本書は，その不思議な性質を興味深い7つの視点(章)から考察する．この7つの視点を選んだ著者のアイデアは実に見事である．本書はわかりやすく無駄がほとんどないので，ぜひお読みになり，7つの視点を味わうことをお勧めする．ここではあえて全体の紹介はせずに，それは読者のお楽しみとしたい．

とてもユニークな本書の圧巻は，「ピタゴラスの三角形」およびそれに続く章と「二等辺三角形と黄金三角形」であろう．

ピタゴラスの三角形とは，3つの辺の長さの比が整数比になる直角三角形のことである．もちろんその面積も整数になる．直角の頂点を原点に置き，直角を挟む2辺をx軸，y軸に選べば，この三角形の2つの頂点はx軸上のA，y軸上のBという格子点に乗るだろう．しかし，斜辺であるABの長さは一般には無理数である．ピタゴラスの三角形というのは，斜辺ABの長さが有理数(分数)になる特殊な直角三角形である．このような三角形は，適当に拡大して，3つの辺の比を整数(既約な比)にできる．もちろん，この三角形は直角三角形であるから，3つの辺の間にピタゴラスの定理が成立している．

すべての既約なピタゴラスの三角形は，

$$(m^2-n^2, 2mn, m^2+n^2)$$

と表せるので，ピタゴラスの三角形の3辺と$[m, n]$を対応させることができる．

$$(3, 4, 5) \longleftrightarrow [2, 1]$$

などである．この対応により，すべてのピタゴラスの三角形は，$[m, n]$-平面の格子点［$m > n > 0$の範囲にある格子点で，公約数のある格子点(既約でない)は除く］に対応させることができる．この$[m, n]$-平面の格子点を，格子点を通る平行な直線群で類別することによりピタゴラスの三角形の性質が見えてくるのが面白い．ピタゴラスの三角形は有理数(＝デジタル)の世界のものだなとの感動を新たにした．

さらに，アポロニウスの窓という面白く美しい図形もピタゴラスの三角形に関係がある．互いに接し合う3つの円に接する第4の円を描くのだが，これを次々と繰り返して作られる図形がアポロニウスの窓である．

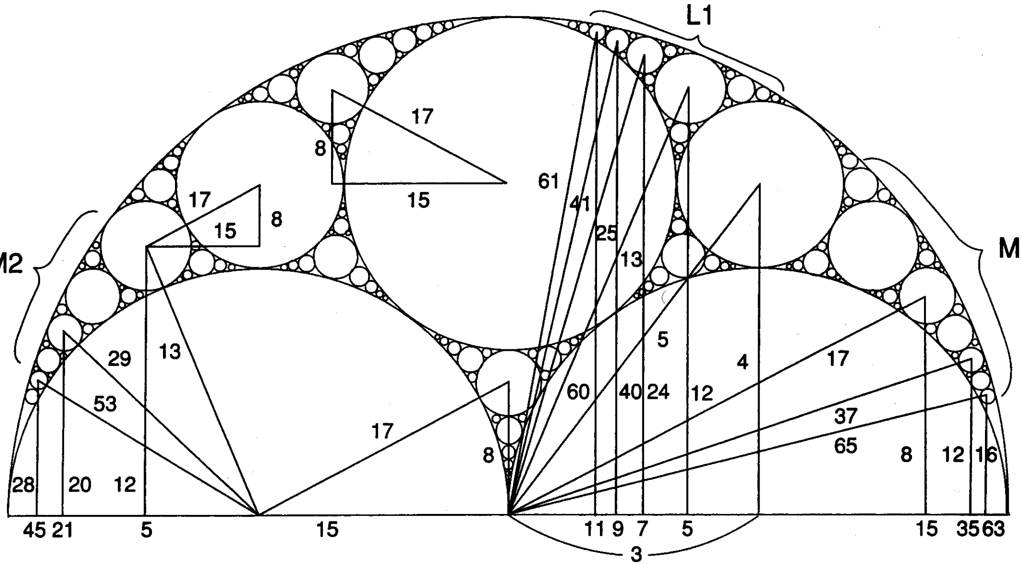
4つの円の曲率をa, b, c, dとすると，

$$2(a^2+b^2+c^2+d^2) = (a+b+c+d)^2$$

というデカルトの発見した定理が成り立っている．アポロニウスの窓には，無数のピタゴラスの三角形が詰まっている(本書p. 84の図を次ページに引用)．アポロニウスの窓の中に現れる円の曲率はすべて整数であり，その逆数の半径は有理数(分数)である．

美しいアポロニウスの窓を見ているといろいろな思いが拡がる．それは，2つの円が互いに接しかつそれらがアポロニウスの窓の外周円とも接しているとき，これらの接点を通り外周円と直交する円を想像しそれを反転円とすれば，この反転円で分断された2つのアポロニウスの窓の世界は互いに鏡像となることだ．もし反転円がどんどん小さくなれば，その小さな領域に大きな世界がどんどん繰り込まれていき，不思議なフラクタル世界の美しさがある．

続く章では，ヘロンの三角形などのピタゴラスの三角形の直角という条件を緩めたものの性質が



「アポロニウスの窓」の中に詰まっているピタゴラスの三角形（『三角形の七不思議』p.84 より）

話題になる．一般の三角形でも，2つ組み合わせると平行四辺形になるので，三角形は平面を隙間なくタイル張りすることができる図形である．正五角形の中を分割してできる頂角 36° と，108° の 2つの黄金三角形は，美しいタイル張り模様を作るので特に興味深い．ここでも黄金比やフィボナッチ数などが現れる．

本書は三角形を通してさまざまな視点から数学を楽しむことができる本である．

谷 克彦（たに・かつひこ／数学月間世話人）